はじめよう数学

上野健爾｜浪川幸彦｜高橋陽一郎｜編集

2

多項式のラプソディー

Nishiyama Kyo

西山 享

［著］

日本評論社

はじめよう数学

この本を手に取られたみなさん！

この本は，同じシリーズの他の本とともに，みなさんを新しい数学の世界に御案内します．

出発地は，みなさんが大学や高等学校で学んでいる数学そのものです．いえ，ここで本を閉じてはいけません．みなさんの学んでいる数学が，いかに豊かでさまざまな数学の世界につながっているかを具体的に知っていただこうというのがこのシリーズの目的です．

旅行の準備として用意していただくものは鉛筆と紙．必ず自分で計算したり，図を書いたりして，自分の頭で考えながらお読みください．結構ハードな道もありますから，寝転がって読んでいたりすると，道に迷ってしまうかも知れませんよ．

私達がみなさんをお連れしようとしている場所は様々です．

数学は数千年以上昔，エジプト，メソポタミアで生まれ，ギリシャで一つの「学問」になりました．ピタゴラスやユークリッドの世界です．ある本はそうした数学の古い伝統がいかに現代にまで連なっているかを見せてくれるでしょう．

近代数学は，18 世紀のオイラーに端を発し，19 世紀のガウス，アーベル，リーマンなどきら星のように輝く巨人達によって花開きました．そこには数多くの美しい理論が生まれ育っています．みなさんが高等学校・大学初年時に学ぶ数学のほとんどはこの時代に由来します．ある本はみなさんの学んでいる数学が，いかに豊かで深い理論に関わっているかを教えてくれるでしょう．

では一体「現代数学」とはどんなものなのでしょう？ 20 世紀になって，前世紀からの豊かな理論は一層の発展を遂げ，以前とは大

きく異なる姿を見せるようになりました．様々の道具としての新しい概念や理論が提唱され，「抽象化」「一般化」され，それによって未解決の問題が次々に解かれていったのです．ある本はこうした数学の新たな展開について語ってくれるでしょう．

もう一つ今世紀の数学の大事なところは，数学の言葉が提唱され数学が体系化されたことです．ヒルベルトからブルバキへの流れです．今はその言葉が普通に使われているため，かえって気がつかないのかも知れません．でもある本は「数学は一つだ」と主張して，このような言葉の大切さを思い起こさせてくれるでしょう．

また数学は物理学など他の学問と深い関わりを持っています．「自然は幾何学の言葉で書かれている」というのはガリレイの有名な言葉です．微分積分学はニュートン力学の誕生とともに確立されました．身近な様々の事柄の中に，実は深い数学が潜んでいるのです．ある本はこのような宝探しのガイドをしてくれるでしょう．

一方で数学は「あそび」です．ゲームや折り紙など，さまざまの頭の体操は数学を基にしています．それを追求していくと，その遊びの本質が実は深い理論につながっていることが分かるのです．ある本はこうして遊びながら数学を学ぶ方法を伝授してくれるでしょう．

こんなにいろいろの数学の世界がみなさんを待っています．

さあ数学を始めましょう！　みなさんはどの道を選びますか？

編集委員一同

はじめよう数学

2

多項式のラプソディー

舜と遼，そして哲子に

はじめに

新聞やTVのニュースを見ていると，世の中は絶望的に暗い．環境問題を報ずる番組を見ていると，この調子でいけば人類は近いうちに滅亡することを確信させてくれる．べつに新聞やTVを見るまでもない．地元の高校では窓ガラスが何百枚と割られ，ちょっとしたことでナイフで刺し殺されてしまう若者もいる．たったの一万円のために胸にナイフを突き立てられるのだ．

このようなニュースを耳にするたびに無力感に襲われるが，その中で毎日生きていく子供達はどのようにこの世の中を感じているのだろう？　どのような人生を心に描けるのだろう？　マスコミは好んで不幸なニュースや，大災害が起こることを予言したがるが，その分を差し引いて考えても，小さな子供達の心を考えると胸が痛む．

でも自分の子供が産まれてくるときには「恐がらないでいいから出ておいで，人生には面白いことがいっぱいあるから」と思っていたし，今も相変わらずそう思っている．

人の原動力は希望をもととしているに違いない．

編集の横山伸さんから「高校生から大学初年級でも読める数学入門書で，学校教育や，受験数学であまり扱われていないものを書いて欲しい」という依頼があったときに僕の心に浮かんだのは，いささか受験勉強に疲れ，あるいは目的を達してめざす大学に進んだものの，あまりに受験という状況に飼い馴らされてしまった学生達の姿だった．そこにはあまり希望というものがないように僕には思えた．

だから，本書を書いた動機は「数学ってこんなに面白い，高校の数学や，受験のための数学とは違う大きな原野が広がっている」ということを伝えたいということにある．そこには何よりも自由と，これから生きてゆくための希望がある，ということを書きたいと思ったのである．

こんな大風呂敷を広げてはみたけれど，それが成功しているかどうかははなはだ心許ない．それは諸君の判断にゆだねよう．(とカッコよくキメル)

＊＊＊＊＊＊

数学は山登りとちょっとばかし似たところがある．

最初はゆるやかな道も途中には断崖や絶壁が控えているし，急な上り坂が続けば息も切れる．時には全部放り出して下山しようかなどと血迷って考えることもある．一方では，ある程度の高みに達すると周りに広がる豊かな景色に見とれたり，道の脇に咲き乱れる高山植物の群落に目を奪われることもしばしばである．そして，登山も数学もすぐれて個人的な作業であること，このような点がとても似ている．実際に数学者で登山が好きな人は意外に多いように思う．

やはり面白さというのは，ある程度山を登ってみなければ分からないし，ある程度登るにはつらいこともある．受験のためのドリル演習とか，あるいは時間が足りないため，理由も明らかでないような条件反射的な解法に慣らされてしまうと，かえって自然な展開が見えないこともあるに違いない．

そこで本書では繰り返しをいとわず簡単なことから始めて，なぜこのように考えるのか，どうしてこれが自然なのかということに時間を費やした．もう少し勉強しないとその「自然さ」が見えないこともあるかもしれないが，あまり細部にこだわらず，素直に筋の展開を追っていただければよいと思う．つづら折りになっている山道を，繰り返し折り返しながら登っていくあの要領である．

さて，登山と数学とは似ていると書いたが，もちろん似ていない部分もたくさんある．数学では頂上というのは仮想的にあるだけで，頂上についたと思ったらさらに聳えたつ峰が見えてくることがほとんどだ．こういうときは素直に，ああまだ終点ではなかったんだ，と喜ぶのがよいだろう．数学ではあまり天気に左右されることもない．もっとも夜みなが寝静まった頃が一番時間的に良しとする数学者もいるようだが．

本書では，ただ単に少し高みに連れていって，ここからなら景色がきれいでしょうといって済ますことはやめておこうと思った．

登ってみるとその上にさらなる大山脈が連なっていることが見て取れるようにしたい．あるいはそこここに枝道や別れ道があって，そちらにもさまよいこめるようにしたい．

登山で道に迷うことは生死の境をさまよう大問題となることもあるが，数学ではさまよっているときが一番面白い．諸君も積極的に道を踏み外してみられたい．そのための指針（?）として，演習問題やさらに進んだ物語を語ってくれるような書物を随所に紹介しておいた．参考にして欲しい．

繰り返す．人生は面白い．そして生きるに値する．

本書の執筆を勧めていただき，経験の足らない筆者のわがままをそのまま認めていただいた編集の横山伸さんに感謝したい．また，岡山理科大学の示野信一さん，京都大学総合人間学部の三宅陽一郎君には草稿を通読してもらって貴重な意見をいただいた．この場をかりて感謝したい．

本書の執筆は次男の遼が誕生した直後に開始し，その成長にあわせて一年間書きついできた．長男の舜と共に筆者をはげますつもりだったのだろう，執筆中は必ず背後に忍び寄ってきて，キーボードを出鱈目に叩き，最後には自分たちの遊びに筆者を付き合わすことを日課としていた．そのような中，妻の哲子の理解と奮闘がなければ本書は完成しなかっただろう．彼らにも感謝したいと思う．

1998 年 10 月 25 日
湖のほとり，草津にて
著者

●目次

$\mathbb{N}$	自然数の全体 (ゼロを含まない)
$\mathbb{Z}$	整数の全体
$\mathbb{Q}$	有理数の全体
$\mathbb{R}$	実数の全体
$\mathbb{C}$	複素数の全体
$A \cup B$	集合 A と B の和集合 (合併)
$A \cap B$	集合 A と B の積集合 (共通部分)
$A \subset B$	集合 A が集合 B に含まれる
$a \in A$	要素 (あるいは元) a が集合 A に属する
$\forall x \ \sim$	すべての (あるいは任意の) x が $\sim$ を満たす
$\exists x \ \sim$	$\sim$ を満足する x が存在する
$P \Rightarrow Q$	P ならば Q である
$P \Leftrightarrow Q$	P と Q は同値である
$n!$	n の階乗 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, \quad 0! = 1$
$n!!$	$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$ または 1, $0!! = (-1)!! = 1$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$	$\{a_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ の総和, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} p_k$	$\{p_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ のすべての積, $p_1 p_2 \cdots p_n$
$[r]$	r を越えない最大の整数 (ガウス記号)

●写像，全射，単射，全単射，同型の説明

二つの集合 A, B を考える． $\forall a \in A$ に対して B の元を対応させる規則が与えられている時，その対応を**写像**とよぶ．記号で $f: A \to B$，$A \ni a \mapsto f(a) \in B$ などと書く．ここで $f(a)$ は $a \in A$ に対応している B の元を表わす．

写像 $f: A \to B$ が与えられた時，A を**定義域**，B を**値域**とよび，B の部分集合 $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$ を A の f による**像**という．

上の設定の下に，f が**全射(上への写像)** であるとは $f(A) = B$ である時にいう．これは $\forall b \in B$ に対して $\exists a \in A$ が存在し，$f(a) = b$ となることと同値である．

また $\forall b \in B$ に対して $f(a) = b$ となるような a がまったくないか，あるいはただ一つだけ存在する時，f を**単射(一対一写像)** とよぶ．このことは $f(a_1) = f(a_2)$ $(a_1, a_2 \in A)$ ならば $a_1 = a_2$ が成り立つことと同値である．

f が単射かつ全射なら**全単射**とよばれる．$f: A \to B$ が全単射なら，ある意味で A と B は (集合として) 同じものとみなしてもよい．そこで f を**同型射**とよぶことがある．

もし A, B が何らかの演算，性質を持っているとき，f がそのような演算，性質を保つと仮定することが多い．さらに f が全単射なら A と B は同型であるとよばれ，$A \simeq B$ または $f: A \xrightarrow{\sim} B$ と書かれる．集合として同型であるということは単に A と B の元の個数が等しいということに他ならない．

第 I 部

序曲

多項式や**複素数**，**行列**などはいわば数学が演じるドラマの舞台といってもよいでしょう．多項式，複素数，行列に共通するのはそれが単なる集合とか対象といったものではなく，和・差，あるいは積といった**演算**を持っているという点です．

演算を持っているような数学的対象を**代数系**とよびますが，さまざまな理論がこのような代数系の上で生き生きと展開されています．逆に数学の新しい理論を産み出すために，新しい母胎としての代数系が必要であったりもします．たとえばジョルダン代数やリー代数，ホップ代数，そして近年隆盛を誇る量子群などの代数系がこのようにして産み出されました．

この第 I 部では特に多項式という代数系に注目して，その基本的な性質をおさらいしつつ，多項式の構成している世界を多様な視点で眺めてみることにしましょう．

多項式に関する話題は，どこかで一度聞いたことがあるような話が多いと思います．**因数定理**，**微分**，行列との関係，**二項係数**，そして複素数と**代数学の基本定理**などなど．このような一度聞いた話を新しい，多数の視点から捉えなおすことによって，いっそう数学の理解は深まるものです．

最終章では，対称式と**三次方程式の解法**や**判別式**の関係を述べましょう．この章はいわばこの後の第 II 部，第 III 部への序曲ともいえる章です．じっくりと味わってみてください．

第 1 章

多項式で肩慣らし

この章では本書で主役となる「多項式」に慣れ親しんでもらおうと思います．諸君の学んだ多項式は次のような格好をしていたと思います．

$$x^2 - x + 1, \tag{1.1}$$

$$2t^3 + 5t - 6, \tag{1.2}$$

$$ax^2 + bx + c, \tag{1.3}$$

最初の多項式(1.1)は x の二次式ですね．次の多項式(1.2)は t の三次式ですが，二次の項はありません(あるいは二次の係数はゼロである，ともいいます)．最後の多項式(1.3)は x の二次式の一般形です．あれれ？ 変数は別に x でも t でもよいわけですから，最後の式だと a が変数でもかまわないですよね．そうです．諸君は何だか知らぬ間に**多変数の多項式**を扱っていたようです．

最後の式の文字を入れ替えて，ついでに掛け算の順番も取り替えて，方程式にしてみましょう．

$$s^2x + sy + z = 0 \tag{1.4}$$

こう書くとちょっと違ったふうに見えるのではないかと思います．昔から[1]変数には $x, y, z, t, \cdots$ などが用いられるのがごく普通なので，どうしてもこのような文字を変数と考えがちです．しかし本書ではどの文字が定数で，どの

[1] どのくらい昔なのか正確なところは私も知りません，でもまぁ高々四百年くらいの昔でしょう．このように変数を組織的に使いだしたのはヴィエト（F. Viète；1540 – 1603）だといわれています．

文字が変数か，というような複雑なことはあまり考えません．もちろん場合によってはある文字を定数と思ったりもします．たとえば(1.4)式は s を定数と思うと，三次元ユークリッド空間の中の原点を通り，ベクトル $(s^2, s, 1)$ に垂直な平面の方程式を表わしています．

上の例で平面の方程式をまだ知らない人は気にしないでください．いずれ学校で教わるはずです．その時まで「平面の方程式ってなんだろう?」という疑問は取って置いてください．**本書を読むのに本書のすべてを理解する必要はありません．**もし知らないことが出てきても，本書で解説していない項目はその部分を飛ばして読んでも差し支えないようにしてあります．逆に知っていることばかり出てきたら面白くないですよね．冒険する余地を自分の心に少しだけ残しておきましょう．

もっとも“知っていると思っていること”をもう一度反省してみることも時には必要です．とくに数学という学問においては．

§1　多項式と割り算

x に関する一変数の多項式は一般的に

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (1.5)$$

と表わすことができます．この場合 x が変数で他の文字 a_k $(0 \leqq k \leqq n)$ はすべて定数と思っています．a_k のことを x の k 次の**係数**とよんだり，単に x^k の係数ともいいます．最後の式は等式の真ん中の式を記号で表わしたもので $\sum_{k=0}^{n}$ の部分を**総和記号**(あるいは**シグマ記号**)とよびます．これは k を 0 から順々に n まで変化させて，それをすべて加えなさいという意味です．たとえば次のように使います．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (\text{等比級数の和の公式}) \qquad (1.6)\end{aligned}$$

この式で $|x|<1$ のとき n をどんどん大きくする，つまり $n \to \infty$ とすると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

がわかります．このように**無限大記号** ∞ も総和に使います．どうです？　便利でしょ？　え，まだありがたみがわからない？　ではもう一つ．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n \\ &= \frac{\left(1 + x^{n+1}n\right)x - (n+1)\,x^{n+1}}{(1-x)^2} \qquad (1.7)\end{aligned}$$

この式が右辺と等しくなることを見るには，等比級数の和の公式（1.6）の両辺を微分してみればよろしい．でも，今は（1.6）式や（1.7）式をよく見て総和記号の使いかたに慣れるだけで十分です．

演習 1.1　次のように表わされた式を総和記号を使って書き直してみてください．（どれも正しい等式ですが，各々の等式を証明する必要はありません）

（1）$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos n\theta$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos n\theta - 1 + \frac{\sin\theta \sin n\theta}{1-\cos\theta}\right)$$

（2）$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$

（3）$\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots = e$

演習 1.2　$|x|<1$ のとき，式（1.7）において $n \to \infty$ とすると

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

となることを確認してください．ただし $|x|<1$ のとき，$nx^n \to 0\ (n \to \infty)$ であることを使ってもかまいません．

さて，多項式の話に戻りましょう．もし(1.5)式で最高次の係数がゼロでないなら，つまり $a_n \neq 0$ なら多項式 $f(x)$ は n **次式**とよばれ，$\deg f(x) = n$ と書きます．また $a_n = 1$ だったら，つまり

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

なら $f(x)$ は**モニック**であるといいます．特別な場合として $f(x) = 0$（定数のゼロ）という場合がありますが，このときは $f(x) = 0$ の次数は $-\infty$ と考えることにします．

$f(x)$ が一般の n 次多項式で $g(x)$ を m 次多項式としましょう．このとき $f(x)$ を $g(x)$ で割り算することを考えます．多項式は**整式**(せいしき)ともよばれるのですが，それは整数と似たような性質を持っているからです．たとえば整数の中では割り算は自由にできませんが，商と余りならいつも求めることができます．多項式でも $f(x)$ を $g(x)$ で割った商と余りを計算することができます．つまり

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad (\deg r(x) < \deg g(x)) \tag{1.8}$$

と表わされているとき，$q(x)$ を**商**，$r(x)$ を**余り**とよびます．

例 1.3 割り算の例として $(x^2 + ax + b)/(2x + a)$ を計算してみます．

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= \frac{1}{4}(2x + a)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \\ &= \frac{2x + a}{4}(2x + a) + \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \end{aligned}$$

ですから，商は $(2x + a)/4$ で，余りは $b - a^2/4$ です．

もう少し複雑な例もやってみましょう．x の多項式として，割り算 $(x^2 + y^2 + z^2)/(x + y + z)$ を実行してみます．

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y - z)(x + y + z) + 2(y^2 + yz + z^2)$$

なので，商は $x - y - z$ で，余りは $2(y^2 + yz + z^2)$ です．

割り算の応用例はたくさんありますが，たとえば次のような定理が割り算を使って簡単に証明できます．

定理 1.4 二つのゼロでない多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が定数以外に共通因数を持たないとします．このとき

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=1 \tag{1.9}$$

となるような多項式 $p(x), q(x)$ が存在します．逆に(1.9)が成立すれば，$f(x)$ と $g(x)$ は互いに素，つまり定数の他に共通因数を持ちません．

［証明］ 逆の方が簡単なのでまず逆を示しましょう．そこで(1.9)式が成り立ったとします．もし $f(x)$ と $g(x)$ が共通因数 $h(x)$ を持ったとすると，

$$f(x)=f_1(x)h(x), \quad g(x)=g_1(x)h(x)$$

と割り切れていますから，

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=(p(x)f_1(x)+q(x)g_1(x))h(x)=1$$

で $h(x)$ は 1 を割り切ります．ところがそのような多項式は定数だけしかありません．

次に $f(x), g(x)$ が共通因数を持たないとしましょう．以下面倒なので，定数は共通因数から省いて考えます．このとき適当に $p(x), q(x)$ をとれば(1.9)式が成り立つことを，$\deg f(x)+\deg g(x)$ に関する帰納法で示してみます．帰納法の最初のステップ，$\deg f(x)+\deg g(x)=0$ の時は明らかに OK です．

一般性を失うことなく $\deg f(x) \geqq \deg g(x)$ としてよいでしょう．そこで $f(x)$ を $g(x)$ で割り算します．

$$f(x)=f_1(x)g(x)+r(x) \quad (r(x) \neq 0)$$

このとき，$g(x)$ と $r(x)$ も共通因数を持ちません．これは上でやった「逆」の部分の証明と同様にして簡単に示すことができます．また $\deg r(x) <$

deg $g(x) \leqq$ deg $f(x)$ なので，deg $g(x)+$ deg $r(x)<$ deg $f(x)+$ deg $g(x)$ です．そこでこの組 $(g(x), r(x))$ には帰納法の仮定が使えます．つまり

$$p_1(x)r(x)+q_1(x)g(x)=1$$

となる $p_1(x), q_1(x)$ が存在します．この式に $r(x)=f(x)-f_1(x)g(x)$ を代入して整理すると，

$$p_1(x)f(x)+(q_1(x)-f_1(x))g(x)=1$$

したがって，$p(x)=p_1(x), q(x)=q_1(x)-f_1(x)$ ととればよいことがわかります． ■

数学ではこのように「証明が必要なこと」を**命題**といい，その中でもとくに頻繁に現われ，しかも美しいものには**定理**という名前をつけています．重要項目のうちで証明が必要なものということです．重要項目でも証明するものではなく，「これこれの性質を持つものをこうよびましょう」とか，「こう書きましょう」といった取り決めに関するものがあります．たとえば多項式の説明を(1.5)式でしましたが，これがそれにあたります．このような取り決めを**定義**といいます．それが式で与えられていれば**定義式**というわけです．

演習 1.5　二つの整数 a, b が互いに素であることと，ある整数 p, q が存在して $pa+qb=1$ が成り立つこととは同値であることを証明してください．

§2　因数定理

諸君は**因数定理**をよく知っていると思いますが，この定理も割り算を使えば簡単に証明できます．

定理 1.6（**因数定理**）　$f(x)$ を多項式とします．このとき $f(x)$ を一次式 $x-a$ で割った余りは $f(a)$ です．とくに $f(a)=0$ なら $f(x)$ は $x-a$ で割り切れます．

［証明］ 割り算の定義式（1.8）によって

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x) \quad (\deg r(x) < \deg (x-a))$$

と書けます．もちろん $x-a$ は一次式ですから，結局 $r(x)$ はゼロ次式かゼロ，つまり定数となります．そこで $r(x) = b$ と書きましょう．したがって

$$f(x) = q(x)(x-a) + b$$

です．$x = a$ を代入すると $f(a) = q(a)(a-a) + b = b$ となって確かに余り b と一致します．また余りがゼロならそれは $x-a$ で割り切れることを意味します． ■

因数定理も応用の幅の非常に広い定理のうちの一つです．

例 1.7 x^n を $x-a$ で割った余りは a^n です．したがって $x^n - a^n$ は $x-a$ で割り切れます．

例 1.8 $f(x)$ を二次式 $(x-a)(x-b)$ で割ったときの余りを求めてみましょう．ただし $a \neq b$ とします．

$$f(x) = q(x)(x-a)(x-b) + cx + d \quad (c, d \text{ は定数}) \tag{1.10}$$

と表わしましょう．この式に $x = a, b$ をそれぞれ代入すると次の連立方程式が得られます．

$$\begin{cases} ca + d &= f(a) \\ cb + d &= f(b) \end{cases}$$

この c と d に関する連立方程式は $a \neq b$ のとき簡単に解けます．答は

$$\begin{cases} c &= \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \\ d &= \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b} \end{cases}$$

となります．諸君は一度自分で方程式を消去法などで解いてみてください．行列を使うともっと簡単に解けるかもしれません．

したがって求める余りは

$$cx+d=\frac{1}{a-b}\Big\{\big(f(a)-f(b)\big)x+\big(af(b)-bf(a)\big)\Big\} \quad (1.11)$$

です．

では $a=b$ の時にはどうなるのでしょうか？　このときは(1.10)式の両辺で $b\to a$ という極限をとればよろしい．(1.11)式で極限をとりますと x の係数は

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\to f'(a) \quad (b\to a)$$

で，これは微分の定義そのものです．では定数部分はどうでしょうか？　それは次の式の極限です．

$$\lim_{b\to a}\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

しかしこの式はじつは計算する必要がありません．実際

$$f(x)=q(x)(x-a)^2+f'(a)x+d$$

において $x=a$ を代入すると $d=f(a)-af'(a)$ となることがわかるからです．したがって $(x-a)^2$ で $f(x)$ を割った余りは

$$f'(a)x+(f(a)-af'(a))=f'(a)(x-a)+f(a)$$

となります．

演習 1.9　$f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れるための条件は $f(a)=f'(a)=0$ であることを示してください．したがって $f(x)$ が重根を持つことと $f(x)$ と $f'(x)$ が共通因数を持つことが同値であることがわかります．

因数定理の証明を見ていると a が通常の数でなくて変数を含んでいてもかまわないことがわかると思います．つまり割り算さえできればよいわけで，それには x の最高次の係数が変数を含んでいなければ(特にモニックなら)OK です．今の場合 $x-a$ は x の係数が 1 ですから，a が x 以外の変

数を含んでいるような多項式でも割り算ができ，その結果因数定理が成り立ちます．

例 1.10 $f(x,y)$ を二変数の多項式で

$$f(x,y)=-f(y,x) \tag{1.12}$$

が成り立つとしましょう．このようなとき $f(x,y)$ は**交代式**とよばれます．さて(1.12)式で x に y を代入してみましょう．すると

$$f(y,y)=-f(y,y), \qquad \therefore \quad 2f(y,y)=0$$

ですから，結局 $f(y,y)=0$ であることがわかります．x に y を代入するとゼロなのですから因数定理によって $f(x,y)$ は $x-y$ で割り切れることがわかります．つまり

$$f(x,y)=g(x,y)(x-y)$$

ここで(1.12)式をまた使ってみると，

$$\begin{aligned} g(x,y)(x-y) &= f(x,y)=-f(y,x) \\ &= -g(y,x)(y-x), \\ &\therefore \quad g(x,y)=g(y,x) \end{aligned}$$

つまり $x-y$ で割った商 $g(x,y)$ は x,y を入れ替えてもまったく同じ式になっています．このようなとき $g(x,y)$ は**対称式**とよばれます．

まとめますと，

交代式は対称式と $x-y$ との積として表わすことができる

ということがわかりました．

§3　微分と多項式環

すでに例 1.8 でも微分がでてきましたが，多項式の割り算の問題で微分がでてくるのはちょっと意外でしたね．いまや数学の研究をするのに微分は必要不可欠な道具で，解析的な性質だけでなく代数学や幾何学を研究するときも基本的な演算として四則演算とまったく同様に現われます．

もともと微分は力学的な視点からニュートン[2]によって，幾何学的な視点からライプニッツ[3]によって考案されました．位置の変化を時間で微分して速度が，速度を微分して加速度が得られるというのが微分の力学的なイメージです．これはニュートン流．幾何的に考えると微分係数は関数のグラフにおける接線の傾きを表わすということになります．これがライプニッツ流．

数式で表わすならば，関数 $f(x)$ の点 a における**微分係数**は

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1.13)$$

で与えられます．このとき a を変数のように動かして関数と考えたものが，**微分**とか**導関数**とかよばれるものです．

例 1.11　すでにやったように $x^n - a^n$ は $x - a$ で割り切れました．簡単な計算によってその商は

$$\begin{aligned}\frac{x^n - a^n}{x - a} &= x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}\end{aligned}$$

---

[2]Isaac Newton (1642/43 – 1727): 数学者にして物理学者，天文学者，そして造幣局局長も務めました．彼の主な関心は自然現象の解明にあったといえるでしょう．特にニュートン力学の創始とその天文学への応用ではめざましい成果をあげました．その過程で微分積分学も産み出されたようです．

[3]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716): 哲学者，科学者にして数学家，さらに外交官を務め，法学，神学，言語学など広い分野に業績を残しました．数学では，微分積分学への貢献と行列式の概念を考えていたことで有名です．

であることが確認できます．両辺で $x \to a$ とすると右辺の各項はすべて a^{n-1} に収束しますから，

$$\left.\frac{d}{dx}x^n\right|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

であることがわかります．これを単に $(x^n)' = nx^{n-1}$ のように書きます．

一般の多項式の微分は上の例と，微分の持っている性質

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\frac{d}{dx}f(x) + \beta\frac{d}{dx}g(x) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \tag{1.14}$$

を使うと

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1} \end{aligned}$$

と計算できます．このような計算は，別に極限を意識しなくても極めて形式的なものですね．要するに多項式において x^k の部分を kx^{k-1} ですべて置き換えればそれでよいわけです．

多項式は関数と考えることもできますが，単に変数のべきの一次結合だと見ることもできます．つまり記号 x^k に係数を掛けていくつか加えたものです．また変数はいつでも実数を動くわけではなく，有理数や複素数，あるいはもっと変わった例として有限体や行列などの値を動くことも考えられます．このような理由から，極限を使った微分の定義は，必ずしも多項式にとって最適であるというわけではありません．

微分を極限を用いないで定義するにはどうすればよいでしょうか？　次のような写像 D を試しに考えてみましょう．D は

$$D : (\text{多項式}) \to (\text{多項式})$$

という写像で次の二つの性質を持っているとします．$f(x), g(x)$ を任意の多項式とするとき

$$D\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x) \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \tag{1.15}$$

$$D\left(f(x)g(x)\right) = D\left(f(x)\right)g(x) + f(x)D\left(g(x)\right) \tag{1.16}$$

「x で微分する」という操作を，多項式を多項式に写すような写像と思えば，微分はもちろんこの二つの性質を持っています．それを確かめてみましょう．

式(1.15) はすでに注意した微分の公式(1.14) を $D = \dfrac{d}{dx}$ として書き換えたにすぎません．一般に(1.15)式を満たすような写像 D を**線型写像**(せんけいしゃぞう)とか**一次写像**とよびます．つまり D は定数倍と和という二つの演算を“保存する”ような写像です．数学ではこのようにある種の演算を保存するような対応(写像)がよく現われ，大切な役割を果たします．

次に(1.16)式は**積の微分の公式**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

に相当します．この場合 D は積という演算を完全に保存するというわけではありません．しかしこの式はある意味で D が乗算と深く関っていることを示しています．

多項式には基本的な演算として定数倍，和，積の三つが考えられますが，上の二つの式はこの三つの演算をすべて含んでいることに注意してください．

じつはこのような写像 D は x の行く先 $D(x)$ を決めてしまうと自動的にすべての多項式に対して決まってしまいます! それはなぜか考えてみましょう．まず第一に線型性(1.15)によって，単項式 x^k に対して D が決まっていれば任意の多項式 $f(x)$ に対して

$$Df(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k D(x^k)$$

という具合になるしかありません．したがって $D(x^k)$ だけわかっていればよろしい．一方 $D(x^k)$ は次のように計算されます．

$$D(x^k) = D(x \cdot x^{k-1}) = D(x)x^{k-1} + xD(x^{k-1})$$

そこで $D(x^k)$ を知るには $D(x^{k-1})$ がわかっていればよい．あとは k に関する帰納法を用いて

$$D(x^k) = kD(x)x^{k-1} \tag{1.17}$$

となることがわかります．この式を見れば，$D(x)$ **が決まれば** $Df(x)$ **はすべて決まる**ことがわかりますね．

逆に適当に多項式 $p(x)$ を選んできて $D(x) = p(x)$ を勝手に与えると $D(x^k) = kp(x)x^{k-1}$ とおくことにより D は要求された二つの性質を持つことが確かめられます．このとき D は

$$D = p(x)\frac{d}{dx} : (\text{多項式}) \to (\text{多項式})$$

と書かれ，**多項式係数の (一階の) 微分作用素**というものになっています．特に $D(x) = p(x) = 1$ とした場合が通常の微分に相当します．

以上のことを定理としてまとめておきましょう．

定理 1.12 多項式の微分は次の三つの条件で特徴づけられる写像 $D : (\text{多項式}) \to (\text{多項式})$ に一致します．

$$D(x) = 1$$

$$D(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

$$D(f(x)g(x)) = D(f(x))\,g(x) + f(x)D(g(x))$$

このように微分をとらえておくと，もう極限の式は必要ありません．したがって，たとえ極限が考えられないような対象の多項式でも微分が定義できることになります．

さて，ここで今までの考察をさらにもう一度レベルアップして考えてみます．

そもそも微分を定義するのに，極限の式を使いたくないことからこの節の考察は始まりました．結果として得られたのは，要するに微分にとって

線型性と積の微分の公式が一番基本的

だというものです．そうすると微分は，一次結合（つまり和と差と定数倍）と積が与えられているような対象だったらなんでも考えることができるということになります!

定義 1.13 三つの演算，和・差・積が与えられているような代数系のことを**環**とよびます．さらにある係数についての定数倍（**スカラー倍**[4]）ができるような代数系は**代数**とよばれます．つまり代数においては一次結合と積が与えられています．

この代数という言葉は，幾何・解析・代数のように学問領域をさす言葉でもありますので，最初はとまどうかもしれませんね．多項式の全体は代数になっているので多項式代数ですが，通常は発音のときのゴロの良さから**多項式環**（たこうしきかん）とよばれています．本書でも「多項式の全体」と書くかわりに以後「多項式環」という言葉を使います．あまり難しく考えないで，多項式環といわれたら,「ああ，多項式の全体なんだな」と思っておいていただければ結構です．

以上の考察は要するに

代数が与えられれば微分が考えられる

と要約されます．

[4]スカラー倍は，たとえば複素数の範囲で考えていれば複素数倍を意味します．実数の範囲なら実数倍，有理数なら有理数倍と基礎となるスカラーによってスカラー倍の概念は変化します．

数学では，整数・複素数などの数や，あるいは多項式・行列といった対象物そのものも大事ですが，それだけではあまり役に立ちません．このような代数的構造において重要なのは演算なのです．微分の定義には，和・差・積・スカラー倍が出てきましたが，有名な**四則演算**で登場しなかったのは商(割り算)ですね．商は他の演算に比べて少し高級で，それは数の進化を見てみればわかります．

$$\text{自然数（和・積）} \longrightarrow \text{整数（和・差・積）} \longrightarrow \text{有理数（四則）}$$

ね?　整数は環ですが，有理数のようにすべての四則が自由に行なえるような代数系のことを**体**といいます．

§4　行列で多項式を微分する!?

ちょっとここで行列の計算をしてみましょう．

行列というのは，長方形の格子状に数字を並べたものでした．二行二列(2×2)だとちょうど四つの数字が並んでいることになります．たとえば次のようなものですね．

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots$$

行列には足し算と掛け算を次のように導入しておきます．

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ v & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au+bv & ax+by \\ cu+dv & cx+dy \end{bmatrix}$$

足し算のほうは簡単ですね．

でも掛け算の方は，なぜこんな複雑な式でわざわざ定義する必要があるのでしょうか?　これには理由があります．難しくいうと**線型写像の合成を計算してみるとこうなる**わけです．しかし今は深入りしないことにして，理由があるのだということだけを注意しておきます．

この掛け算の式は十分複雑に見えますが，じつは次のようにも書けます．

$$F=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと

$$F[\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}]=[F\boldsymbol{u},F\boldsymbol{x}]$$

もちろん $F\boldsymbol{u}$ などは

$$F\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$$

と決めておくわけです．このように書くと三行三列以上でもどのように掛け算を決めるべきなのかがわかるのではないでしょうか？　最後に行列の定数倍（スカラー倍）を，各要素を定数倍することと決めておきます．

$$\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \quad (\alpha \text{ は定数})$$

演習 1. 14　F を 2×2 行列として，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を 2 次元ベクトルとします．このとき

$$F(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha F\boldsymbol{u}+\beta F\boldsymbol{v} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

であることを確かめてください（F の線型性）．逆にこのような性質を持つ写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は $f(\boldsymbol{u})=F\boldsymbol{u}$ と行列 F を用いて書き表わすことができます．つまり $f(\boldsymbol{u})$ が $\boldsymbol{u}$ の座標について一次式で表わせることと線型写像ということは同じです．一次写像という命名はこの事実に由来しています．

さてこの行列を使って実際にちょっとした計算をしてみましょう．まず

$$A=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

とおきます．要素の一部が変数になっていますが，気にしないで計算しましょう．この行列の n 乗（つまり n 回の積）がどうなっているかを帰納的に確かめてみますと，

$$A^2 = \begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} x^3 & 3x^2 \\ 0 & x^3 \end{bmatrix},\ \cdots,\quad A^n = \begin{bmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{bmatrix}$$

となりそうです．実際次のワンステップを計算してみますと

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{n+1} & (n+1)x^n \\ 0 & x^{n+1} \end{bmatrix}$$

となって確かに正しいことがわかります．

この行列 A^n をよくみると対角成分は同じで単項式 x^n になっていて，$(1,2)$ 成分（1 行 2 列目の成分）はちょうどその微分 nx^{n-1} になっていることがわかります．つまり多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

にあわせて**行列の多項式**を

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \\ &= a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 1_2, \quad 1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書くと（1_2 は 2×2 の**単位行列**を表わします），上の計算から

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(x) & f'(x) \\ 0 & f(x) \end{bmatrix}$$

となることが結論されます．つまり 行列の計算で微分が計算できる ことになります!

演習 1.15　2×2 行列 B を

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

とおきましょう．このとき多項式 $f(x)$ に対して

$$f(B) = \begin{bmatrix} f(a) & \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ 0 & f(b) \end{bmatrix}$$

となることを示してください．このことから $b \to a$ の極限をとると微分の定義式(1.13)が復活できます．

以上で多項式の微分に関して三つの違った見方があることを学びました．微分は

- グラフの接線の傾きを極限によって計算する
- 線型性と積の微分の公式を満足するような写像として捉える
- 行列 A の多項式の対角成分ではない成分の値

などとして現われるのでした．もちろんこの他にもいろいろな見方があると思います．

同じことを違った視点からみることができること，あるいはまったく違って見えるものが同じものであることを発見する能力が，人生を豊かにするには不可欠であると思います．物理学においても，たとえば量子力学は光の波としての性質と粒子としての性質の二面性を理解しようとする試みから始まりました．

人生においても物理においても大事なことが，どうして数学だけで大事でないということがあるでしょうか?

一つのことを多様な視点でみることができること

これがやはり数学をとても豊かにすると思います．

もちろん多様な視点だけで数学が豊かになるわけではありません．時には荒波の吹き荒れる海を乗りきるだけの力(計算力，指導原理，などなど)も必要です．もっともそれは人生についてもいえることですね．数学と人生，ぜんぜん異なっているこの二つのものもじつは同じものの二つの違った貌(かお)な

のかもしれません.

§5　偏微分

多変数の多項式を微分するには，いったいどの変数について微分するのかを指定する必要があります．そのようなときには残りの変数は微分する変数とはまったく無関係な定数と思って微分を行ないます[5].

たとえば二変数の多項式について考えてみましょう．多項式 $f(x,y)$ を x で微分するときには y は定数と思って微分するわけです．このような微分の仕方を x について**偏微分する**（へんびぶん）といって，記号で

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

のように表わします．もちろん y で偏微分するときには

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

ですね．二階微分したり，あるいは n 階微分するということも考えられます．例をあげてみると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y),\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y),\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y),\quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$$

などのように．最後の例では微分する順番が異なっていて，まず x で偏微分した後，y で偏微分する場合と，その逆の順序で偏微分する場合があるというわけです．しかし多項式を偏微分するときには，偏微分した結果は偏微分の順序にまったく関係がありません．これは高階の偏微分についても同じです．たとえば 3 階の偏微分は次の 4 種類しかありません．順番を考慮にいれると何種類になるかを考えてみてください．

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y),\quad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x,y),\quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y),\quad \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y)$$

---

[5] もちろん，ある変数が残りの変数の関数であるという場合も起こり得ます．この時には事情がいささか複雑ですが，本書ではそのような場合は扱いません．

さて，もし x で $f(x,y)$ を偏微分してゼロになったとすると，それは x について定数ということですから，結局残りの変数 y のみについての多項式だということになります．数式で書くと

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0 \iff f(x,y)= \exists g(y) \iff f(x,y)=f(0,y)$$

ここで記号 $\iff$ は「**同値**である」，あるいは「**必要十分条件**である」という意味を表わし，記号 $\exists$ は「**存在する**」ということを表わします．上の式では y の多項式 $g(y)$ が存在するということを表わしていますね．

一変数関数の場合には微分するとゼロ $\Rightarrow$ 定数関数，と条件反射的に考えていたかもしれませんが，多変数の関数では少し注意が必要です．次の定理は上にあげた偏微分の性質の一般化です．

定理 1.16 $f(x,y)$ が次の等式を満たすと仮定します．

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$$

このとき $f(x,y)$ は $(x-y)$ の多項式です．つまり一変数の多項式 $g(t)$ が存在して，$f(x,y)=g(x-y)$ と表わされます．

［証明］ 新たな変数 u,v を導入して，それを x,y を使って

$$\begin{cases} u &= (x+y)/2 \\ v &= (x-y)/2 \end{cases}$$

とおきましょう．すると，これを逆に解いて，

$$\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u-v \end{cases}$$

そこで，$h(u,v)=f(u+v,u-v)=f(x,y)$ と書きましょう．このとき

$$\frac{\partial}{\partial u}h(u,v) \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

が確かめられます．これを例で説明してみましょう．

$$h(u,v)=u^n v^m=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\left(\frac{x-y}{2}\right)^m=f(x,y)$$

を x で偏微分してみます．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\left(\frac{x-y}{2}\right)^m \\
&\quad=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\right\}\left(\frac{x-y}{2}\right)^m+\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{2}\right)^m \\
&\quad=\frac{n}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{x-y}{2}\right)^m+\frac{m}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\left(\frac{x-y}{2}\right)^{m-1}
\end{aligned}$$

同様に y で偏微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\left(\frac{x-y}{2}\right)^m \\
&\quad=\frac{n}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{x-y}{2}\right)^m-\frac{m}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\left(\frac{x-y}{2}\right)^{m-1}
\end{aligned}$$

したがってこの二式を辺々加えて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)&=n\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{x-y}{2}\right)^m \\
&=nu^{n-1}v^m=\frac{\partial}{\partial u}h(u,v)
\end{aligned}$$

となり，確かに成り立ちます．一般の多項式はこのような単項式の和ですから，まったく同様に計算できます．

したがって定理の条件式が成り立つことは $\dfrac{\partial}{\partial u}h(u,v)=0$ と同値です．しかしこのことはすでに定理の前で注意したように $h(u,v)=f(x,y)$ が $v=(x-y)/2$ だけの多項式であることを意味します． ■

このように偏微分を使うと，多項式が $(x-y)$ だけの多項式になるというような条件が簡単に数式で表わされることになります．じつはこの「数式で表わされる」という部分は，現代数学においてとても重要な部分で，特に代数学にとって

「式に表わされる」ということは「数学をする」ということとほぼ同じ

といってもよいぐらいです[6]．他の要因があるにせよ，数式記号の発明と整備の後，数学が飛躍的に進歩し始めたことがそのことをはっきりと示唆していると思います．

演習 1. 17　同時にゼロではない実数 a, b に対して，$f(x,y)$ が次の式を満たすとします．

$$a\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$$

このとき $f(x,y)$ は $bx-ay$ の多項式であること，つまり一変数の多項式 $g(t)$ が存在して $f(x,y)=g(bx-ay)$ と表わされることを示してください．

偏微分の記号をあたかも通常の文字式と同じように扱って

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

などと書きます．ここで

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$$

とおくと，定理 1. 16 は $Df(x,y)=0$ であることと $(x-y)$ の多項式であることが同値であることを主張しています．このように書いたとき D は多項式環からそれ自身への線型写像とみなされ，**偏微分作用素**(へんびぶんさようそ)とよばれます．

§6　二次方程式の解と係数の関係

多項式への入門の最後に，二次方程式の解と係数の関係を思い出しておきましょう．それは次のようなものでした．

未知数 t についての二次方程式

$$t^2-at+b=0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

[6]微分積分学がこのように発展を遂げたのは，ライプニッツの記号法が重要な要因でした．現在我々の使っている微分の記号 $\dfrac{d}{dx}$ や積分の記号 $\int f(x)dx$ などはライプニッツの発明によるものです．

の二つの解を（重根を持つ場合[7]には同じもの二つを並べて）α, β とします．すると α, β と係数の間に

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

という関係が成り立ちます．実際それは，$t^2 - at + b = (t - \alpha)(t - \beta)$ を展開して両辺の係数を比較してみればすぐにわかります．

ところで諸君が解と係数の関係を習ったときにはもちろん a, b, α, β などは数，つまり実数とか複素数とかであったのだと思います．しかし上で注意したように，証明は単に二つの式の係数を比較するだけですから，これらの数は変数であってもいっこうに差し支えありません．つまり

$$t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$$

だったら

$$u = x + y, \quad v = xy \tag{1.18}$$

が成り立つというわけです．変数と思いやすいように文字を書き換えましたが，これは上の式と本質的に同じ式です．同じ式なのですが，このように変数を表わすような文字で書くとちょっと違って見えますね．

$x + y, xy$ は x と y を入れ替えても変わらないので対称式ですが，この二つの式は特に**基本対称式**とよばれています．その理由は

> **すべての対称式がこの二つの対称式の多項式として**
> **ただ一通りに表わせる**

からです．このことは経験的によく知っているはずだと思いますが，解と係数の関係を使ってこれを証明してみましょう．

---

[7] 重根は重解とも言いますが，少しニュアンスが違うようです．しかし本書ではあまりこだわらず，根と解はほぼ同じ意味に用いることにします．

その前に多項式の全体にあたる記号を導入しておきます．記号の導入はいささか遅すぎたくらいですね．まず多項式を考えるときには**係数の集合**をはっきりさせる必要があります．通常はこれを有理数の全体 $\mathbb{Q}$ とか，実数の全体 $\mathbb{R}$，あるいは複素数の全体 $\mathbb{C}$ とかにとります．ここでは係数の集合を有理数にとりましょう．そうすると変数 x についての多項式全体は

$$\mathbb{Q}[x]$$

と表わされます．

えーっ？　こんなの？　と思われる諸君も多いかもしれません．少し説明しますと，まず最初の $\mathbb{Q}$ はもちろん係数を表わしています．次の括弧 [ ] は**括弧内の元の自由な積と和を考えなさい**というぐらいの意味です．もちろん和は有理数を係数とするわけなので，難しくいうと「積と有理数を係数とする一次結合を考えなさい」というほうが少し正確です．今の場合は x の積は要するにべき乗のことで，それは単項式です．単項式の和（あるいは一次結合）が多項式ですから，結局それは多項式の全体になりますね．

同様にして $\mathbb{C}[x,y]$ は複素数を係数とする二変数多項式環です．つまり，複素数を係数とする二変数 x,y の多項式の全体が $\mathbb{C}[x,y]$ です．このように考えると元になっているものは $\mathbb{C},x,y$ の三つで，これから，積と和と複素数倍（係数倍）を演算として全体が生成されていく様が目に浮かぶと思います．数学にもちょっぴり空想する力が必要です[8]．

諸君はすでに複素数 $\mathbb{C}$ についてはよく知っていると思いますが，ここではあまり深入りせずにもう少しあとで詳しくやります．難しく感じる人は今のところは有理数 $\mathbb{Q}$，実数 $\mathbb{R}$ を考えてもらっていてかまいません．

さて本題に戻って，任意の対称式が基本対称式 $x+y, xy$ の多項式としてただ一通りに表わされることを証明しましょう．二変数の対称式の全体を $S(x,y)$ と書くことにします．証明すべきことを数式で書くと次のような定理になります．

[8] いや，本当はとてもたくさん必要だと思います．見知らぬ国を探検するための冒険心と，その国を創造するための空想力．どちらも数学には不可欠です．

定理 1. 18　二変数の多項式環 $\mathbb{C}[u,v]$ から対称式のなす環 $S(x,y)$ への写像 φ を次のように決めます.

$$\varphi(f(u,v)) = f(x+y, xy) \quad (f(u,v) \in \mathbb{C}[u,v])$$

つまり u, v に基本対称式を代入するという写像が φ です. するとこの写像 $\varphi : \mathbb{C}[u,v] \to S(x,y)$ は全単射写像になります.

定理を証明する前にこの**定理の解釈**をしておきます.

まず写像 φ が**全射**だということは $\mathbb{C}[u,v]$ が φ によって $S(x,y)$ 全体に写っているということです. したがって任意の対称式 $e(x,y)$ に対して $e(x,y) = f(x+y, xy)$ となるような $f(u,v) \in \mathbb{C}[u,v]$ が存在する, つまり**対称式は基本対称式の多項式で書ける**ということを意味します.

次に φ が**単射**だということはそのような $f(u,v)$ はただ一つ, つまり**書き表わし方はただ一通りしかない**ということを意味しています.

このように数式で書かれた定理の「真の意味」を理解することは, じつはなかなか骨の折れることです. しかし一方で, このように数式で定式化することにより, 証明したい事実はよりはっきりし, しかも証明しやすくなります. このことを以下の証明では注意しながら進んでいきましょう.

［定理 1. 18 の証明］

まず φ は明らかに線型写像です. 線型性はもう何度も出て来ましたが, 定数倍と和を保存するという意味でした. 数式で表わすと

$$\varphi(\alpha f(u,v) + \beta g(u,v)) = \alpha\varphi(f(u,v)) + \beta\varphi(g(u,v))$$

です. 線型性はこのような場合には決定的な役割を果たします. その例が φ の単射性の証明でしょう.

φ は線型写像なので, 単射であることを示すには $\varphi(f(u,v)) = 0$ なら $f(u,v) = 0$ であることを示せば十分だということがわかります! 実際, もしこれが証明できたとしますと,

$$\varphi(f(u,v)) = \varphi(g(u,v)) \Rightarrow \varphi(f(u,v)) - \varphi(g(u,v)) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi(f(u,v) - g(u,v)) = 0$$

ここで証明できた事実を使うと

$$\varphi(f(u,v) - g(u,v)) = 0 \Rightarrow f(u,v) - g(u,v) = 0,$$
$$\therefore \quad f(u,v) = g(u,v)$$

となって単射性がわかります．これをちょっとまとめておきましょう．

線型写像では単射性と「ゼロに写るものがゼロしかない」ということは同値

少し線型代数の理論を習ったことのある人には上の「…」の部分を「ゼロの逆像はゼロだけである」とか「線型写像の核が自明である（ゼロのみである）」とかという具合にカッコよくいったほうがよくわかるかもしれません．

そこで $\varphi(f(u,v)) = f(x+y, xy) = 0$ としてみましょう．もし $f(u,v) \neq 0$ ならある複素数の組 (a,b) があって $f(a,b) \neq 0$ となっているはずです．ところが次の二次方程式

$$t^2 - at + b = 0$$

の解を α, β とすると $a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta$ ですから

$$0 \neq f(a,b) = f(\alpha + \beta, \alpha\beta) = 0$$

となって矛盾です．最後の $= 0$ は $f(x+y, xy) = 0$ なので x, y にどのような値を代入してもゼロであることから従います．したがって $f(u,v) = 0$ であることがわかりました．

次に φ の全射性を示しましょう．まず対称式 $e(x,y)$ が単項式 $cx^m y^n$ $(c \in \mathbb{C})$ を含んでいれば，x, y を交換しても不変ということから $cx^n y^m$ の項も含まなければなりません．したがって $e(x,y)$ は $c(x^m y^n + x^n y^m)$ の形の

式の和に書けます．再び写像 φ の線型性によって結局 $x^m y^n + x^n y^m$ が基本対称式の多項式として表わされれば十分です．あとはそれの一次結合をとればよいからです．

ここでも写像の線型性が物事をとても簡単にしていることに注意しておきたいと思います．このような便利なものを放っておく手はありません．

では $x^m y^n + x^n y^m$ が基本対称式で表わせることを具体的に見てみましょう．条件は対称ですから $m \leqq n$ として差し支えありません．そうすると

$$x^m y^n + x^n y^m = (xy)^m (x^{n-m} + y^{n-m})$$

です．右辺の第一因子はすでに基本対称式のべきですので，第二因子 $x^{n-m} + y^{n-m}$ がやはり基本対称式で表わされればよいことになります．そこで $x^k + y^k$ が基本対称式で表わされることを k に関する帰納法で証明しましょう．$k = 0, 1$ の場合には明らかです．$k \geqq 2$ なら

$$x^k + y^k = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) - xy(x^{k-2} + y^{k-2}) \quad (1.19)$$

という漸化式が成り立ちますので右辺において $k-1, k-2$ の場合を基本対称式で書き表わしておくと結局 $x^k + y^k$ も基本対称式で書けることがわかります．漸化式については右辺を展開してまとめれば左辺になることが確かめられます．（このあとの演習問題を参照してください） ■

例 1.19 $(x-y)^2$ は対称式ですが，基本対称式で表わすとどうなるのでしょうか?　少し計算すると

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (x+y)^2 - 4xy$$

となることがわかります．これはつまり $\varphi(u^2 - 4v) = (x-y)^2$ であることを意味します．u, v を二次式 $t^2 - ut + v$ の係数と思うならば $u^2 - 4v$ はその**判別式**になります．上の定理より $u^2 - 4v = 0 \iff (x-y)^2 = 0$ ですから，(判別式) $= 0$ と方程式が重根を持つことが同値になることがわかります．もっともこれはとてもよく知られた事実ですね．

演習 1.20 $U = x + y, V = xy$ と書きましょう．このとき

$$t^2 - Ut + V = (t - x)(t - y)$$

の両辺に t^k を掛け，さらに $t = x$ とおくことによって

$$x^{k+2} - Ux^{k+1} + Vx^k = 0$$

となることを確かめてください．y にも同様のことをやって辺々加えると漸化式(1. 19)が得られます．

このように証明しておくと一般化された漸化式(ニュートンの公式とよばれます)の証明にも役に立ちます．

第 2 章……………………

複素数と多項式の華麗な関係

この章では多項式の因数分解と複素数の関係について述べます．多項式の因数分解の問題は n 次方程式の根を求める問題とほぼ同じです．ガウスが初めて厳密な証明を与えた代数学の基本定理は「複素数の範囲で考えれば方程式は必ず根を持つ」ということを主張しています．じつはこの定理を逆に眺めると，方程式が解けることを要請することにより，そこから複素数が生まれてくることがわかります．まるで海の泡からヴィーナスが誕生したように忽然と複素数が現われるのです．

複素数は本書の後の部分でもとても重要な働きをしますので，本章ではいろいろな見方で多項式と複素数の関係を眺めてみることにしましょう．

§1　代数学の基本定理

複素数は二つの実数の組で表わされるような平面的広がりを持った数です．それは通常 $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ というふうに書かれます．この i は**虚数単位**（きょすうたんい）とよばれ，$i^2 = -1$ を満たします．二乗すると -1 になる数ですから，i は -1 の平方根です．そういうわけで $i = \sqrt{-1}$ などと書く場合もあります．また実数はよく知られているように二乗すると正の数になりますから明らかに i は実数ではありません．

複素数を説明するときには，それが「仮想的な数」であるかのようによく

説明されます．あの有名なガウス[1]でさえもが複素数を使って得た結果を公表するのに慎重であったことは，ガウスの活躍していた1800年代の初頭でさえ数学を専門としない人達の間で複素数は胡散臭いものとみなされていたことを示唆しています．もちろんガウスは複素数を駆使して彼の数学を構築していったわけですが…

しかしふりかえってみれば負の数などというのは1500年頃にいたってもまだ市民権を得てはいませんでした．その頃方程式の解といえば正の数しか相手にされなかったのです．今や負の数は中学生でも易々と扱える，なくてはならない対象ですね．それと同じように複素数は決して想像上の数なんかではなく，ちゃんとした数学的実体を持った数です．複素数に慣れ親しむにつれて確かに実在するという確信の度が深まっていきます．

複素数の加法（足し算，和）と乗法（掛け算，積）は式で表わすと次のようになります．a, b, c, d をすべて実数としましょう．

$$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(c+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

つまり加法は各実数の成分ごとに行なう．乗法は上のように書くと本質が見えにくいかもしれません．要するに，積は分配法則を用いて，実数同士の掛け算は通常のように行ない，純虚数同士の掛け算は $i^2=-1$ を用いて計算するということを述べているのです．では減法（引き算）と除法（割り算）はどうでしょうか？　減法は加法の逆演算ですから，簡単な計算によって

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

とならなければいけないことがわかります．一方，積の逆演算となる割り算は，

---

[1] Carl Friedrich Gauss（1777 – 1855）：ガウスは18世紀から19世紀にかけての最大の数学者，いや，数学全史においても最大の数学者の一人といえるでしょう．彼の精力は主に整数論に傾けられましたが，楕円函数，曲面上の積分の研究など多彩な研究を繰り広げました．物理学上の業績も数多く，ガウスの名前のついた定理や概念がたくさんあります．ガウスの業績については［14］，［9］，［8］を読んでみることをお勧めします．

$$(c+di)(c-di)=c^2+d^2$$

となることから，$c=d=0$ でなければ（つまり複素数として $c+di\neq 0$ なら）

$$\frac{1}{c+di}=\frac{c-di}{c^2+d^2}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i$$

となるべきことがわかります．したがって除法は掛け算を用いて，

$$\frac{a+bi}{c+di}=(a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i\right)$$

と表わされます．

このように一見複雑そうな複素数ですが，複素数を使うことでさまざまなメリットがあります．その最大のものはガウスによる次の**代数学の基本定理**でしょう．

定理 2. 1（**代数学の基本定理**）　$f(x)$ を複素数を係数とする n 次多項式とすると方程式 $f(x)=0$ は少なくとも一つの複素数解を持ちます．つまりある $\alpha\in\mathbb{C}$ が存在して $f(\alpha)=0$ が成り立ちます．

実数の範囲で解を探すと，**解をまったく持たない**いくらでも大きな次数の方程式が存在します．もちろん有理数の範囲で探しても同じですし，たとえば係数を整数に限っても事情は変わりません．この定理が成り立つためにはどうしても複素数が必要です．

この定理の内容を「複素数は代数的に閉（へい）である」という具合にいうこともあります．難しい言い方ですがちょっとかっこいいですね．あるいはもっと難しく「複素数は代数的閉体（だいすうてきへいたい）である」ともいいます．これらの言葉は要するに**方程式の根をとるという操作について複素数は閉じた世界になっている**ということを言い表わしているにすぎません．方程式を解くことが数学家の命運をかけるほど重要な時代があったので「代数的」という言葉が現在でも「方程式を解く」というのとほぼ同義に使われているわけです．

話が横道に逸れました．この定理がなぜ代数学の基本定理とよばれるほど重要な定理なのでしょうか？　もちろん方程式を解くときに，解が存在する

かどうかわかっていないよりは，わかっていたほうが解きやすいですね．しかしこの定理は方程式の解を具体的に探してくれるわけではありません．ところが定理からの結論はじつに実り多いのです．本書ではこの定理を認めてその帰結を見てみることにします．定理の証明についてはたとえば［15］，［3］などを参照してください．

系 2.2 n 次の多項式 $f(x)$ は複素数を係数とする一次式の積に分解します．つまり $\gamma, \alpha_i (1 \leqq i \leqq n)$ を複素数として

$$f(x) = \gamma(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = \gamma\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) \qquad (2.1)$$

と因数分解されます．ここに γ は $f(x)$ の最高次の項の係数で，もし $f(x)$ がモニックなら $\gamma = 1$ です．

この系の中で使われている $\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ という**積記号**は，$1 \leqq i \leqq n$ に対して $(x-\alpha_i)$ のすべての積を表わしています．総和記号 $\sum$ とよく似ていますが，$\sum$ は summation（和）の頭文字 S，$\prod$ は product（積）の頭文字 P をギリシャ語の大文字を用いて表わしたものです．

［系 2.2 の証明］

代数学の基本定理により少なくとも一つの複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $f(\alpha) = 0$ です．すると因数定理より $f(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れることになります．

$$f(x) = (x-\alpha)q(x) \quad (q(x) \text{ は } n-1 \text{ 次式})$$

そこで帰納法を使うことにすれば $q(x)$ は $(n-1)$ 個の一次式の積に分解しているはずですから $f(x)$ は結局 n 個の一次式の積に分解します． ■

この系より複素数の範囲で考えると

> **n 次方程式 $f(x) = 0$ は重根をその重複度だけ数えて**
> **ちょうど n 個の根を持つ**

ことがわかります．ここで α が $f(x)=0$ の根であるとき，$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるなら**重根**，また $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ で $q(x)$ はもう $x-\alpha$ では割り切れないとき m を根 α の**重複度**（ちょうふくど）といいます．

この「n 次方程式は n 個の根を持つ」という形のものを代数学の基本定理とよぶことも多いようです[2]．

演習 2.3 α が $f(x)$ の重複度 m の根であることは $f^{(k)}(\alpha)=0$ $(0 \leqq k < m)$ が成り立つことと同値であることを示してください．ただし $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 階の微分を表わします．

このように n 次多項式は n 個のゼロ点を持つわけですが，特筆すべきことはこの n 個のゼロ点によって多項式そのものがほとんど決まってしまうという点です．次の公式は多項式のそのような性質を見事に言い表わしています．

定理 2.4 $f(z)$ を z の n 次式とします．このとき $f(z)$ は相異なる $(n+1)$ 点での値

$$f(w_0),\ f(w_1),\ \cdots,\ f(w_n)$$

によって完全に決まります．またその時，

$$\pi(z)=(z-w_0)(z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_n)=\prod_{j=0}^{n}(z-w_j)$$

と書くと，$f(z)$ は次の式で与えられます．

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(w_i)}{\pi'(w_i)}\frac{\pi(z)}{z-w_i} \tag{2.2}$$

つまりこの定理は

---

[2] 方程式の解と書くと重複度を考えないことが多いのでここでは根という言葉を用いました．根と解およびゼロ点という用語は本書ではあまり区別しないで用いることにします．

$(n+1)$ 個の勝手に与えた点を通る n 次の多項式がただ一つだけ，しかも必ず存在する

ということを主張しています．ラグランジュ[3]の手になるこの公式は，与えられた点と点の間を多項式によって定義された曲線で埋めるという意味で，**ラグランジュの補間公式**とよばれています．

［証明］ まず前半の部分を示しましょう．与えられた $(n+1)$ 個の値をとる n 次多項式が他にもあったとしてそれを $g(z)$ と書きましょう．すると $h(z) = f(z) - g(z)$ は n 次以下の多項式ですが，この多項式は $z = w_0, w_1, \cdots, w_n$ の各点でゼロになります．ところがゼロでない n 次方程式はたかだか n 個のゼロ点しか持ちませんから，このことは $h(z) = 0$ であることを示しています．つまり $f(z)$ と $g(z)$ は一致しているわけです．

次に $f(z)$ の表示式(2.2)を示しましょう．すでに示したことから，右辺で定義された式が n 次の多項式であって，かつ与えられた値をとることを確かめればよいことになります．そのような多項式は $f(z)$ 以外にはないのですから!

そこで右辺の式を $g(z)$ と書いておきましょう．この $g(z)$ は確かに n 次式であることをまず確認しておきます．右辺の和に現われる各項は

$$\begin{aligned}&\frac{f(w_i)}{\pi'(w_i)}\frac{\pi(z)}{z-w_i}\\&\quad=\frac{f(w_i)}{\pi'(w_i)}(z-w_0)\cdots(z-w_{i-1})(z-w_{i+1})\cdots(z-w_n)\end{aligned}$$

となり確かに n 次式です．その和をとっているだけですから，もちろん $f(z)$ も n 次式ですね．

[3]Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)：オイラーと共に変分学を建設し，幾何に頼らない解析力学を創始しました．一方で方程式論を不変式によって理解したり，形式的べき級数環を考えるなど現代代数学の考え方を持っていました．人柄は温厚誠実だったようで，フランス革命の最中，マリー・アントワネットやナポレオンと，王党派，共和党派に関係なく偉大な数学者として尊敬を集めていたようです．

では $g(w_k)$ は一体どうなっているのでしょうか？　まず和の各項では $i \neq k$ なら項そのものがゼロです．実際 $i \neq k$ なら $\pi(z)/(z-w_i)$ は $(z-w_k)$ の因数を含んでいます．したがって $z = w_k$ を代入すると，第 k 項だけが残り，

$$
\begin{aligned}
g(w_k) &= \frac{f(w_k)}{\pi'(w_k)} \left. \frac{\pi(z)}{z-w_k} \right|_{z=w_k} \\
&= \frac{f(w_k)}{\pi'(w_k)} \lim_{z \to w_k} \frac{\pi(z)-\pi(w_k)}{z-w_k} = f(w_k)
\end{aligned}
$$

したがって，両者の w_k における値は一致します．これでおしまい．■

例 2.5　ラグランジュの補間多項式は時として思わぬことに役に立ちます．たとえば x_i $(i = 1, 2, 3)$ を未知数とする次の連立一次方程式を考えましょう．

$$
\begin{cases}
x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 &= A \\
x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3 &= B \\
x_1 + \gamma x_2 + \gamma^2 x_3 &= C
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

もちろん，係数に現われる α, β, γ はすべて相異なるとします．この特殊な連立一次方程式は変数 t の二次多項式を

$$f(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

とおくと，

$$f(\alpha) = A,\ f(\beta) = B,\ f(\gamma) = C$$

を意味しています．つまり相異なる 3 点 $t = \alpha, \beta, \gamma$ での値が指定されているわけです．したがってラグランジュの補間公式を適用することにより $f(t)$ を求めることができます．t の各次数の係数を見れば，それが x_i $(i = 1, 2, 3)$ を与えます．特にこの連立一次方程式には解が存在し，しかも一意的であることがわかります．

演習 2.6　連立一次方程式 (2.3) を解き，解を具体的に求めてください．

§2　複素数で遊ぶ

複素数を扱う上で基本的なのは**ド・モアブルの公式**[4] です．

定理 2.7　θ, φ を実数とすると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \tag{2.4}$$

が成り立ちます．特に累乗に関して次の式が成り立ちます．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

［証明］ 最初の式はじつは**三角関数の加法公式**とまったく同じ内容の式です．実際 (2.4) 式の左辺を展開しますと

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)$$
$$+i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)$$

ですが，これを右辺の実部・虚部と比較すると加法公式そのものですね．

累乗は (2.4) 式を繰り返し適用するとよいのですが，問題は n が負の整数のときです．$n=-1$ のときだけやってみます．(2.4) 式で $\varphi = -\theta$ とおくと，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

ですから

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

したがって，$n=-1$ のとき確かに成立していることが確かめられました．

■

[4] Abraham de Moivre（1667 – 1754）

このcos $\theta + i\sin\theta$ という式はよくでてきますので以下

$$e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

と表わすことにしましょう．するとド・モアブルの公式は

$$\begin{cases} e(\theta)e(\varphi) = e(\theta+\varphi) \\ e(\theta)^n = e(n\theta) \end{cases}$$

となって，**指数法則**ととてもよく似ていることがわかります．指数法則は指数関数の加法公式というべきもので，他にもこのような加法公式が成り立つものとしては**楕円関数**（だえんかんすう）などがよく知られています．

えっ？　楕円関数って何かって？　そうですね，とても面白く，また秘められたドラマも数多く持っている関数の一つといえると思います．興味のある人はたとえば［14］,［20］,［18］などを読んでみてください．楕円の特殊な場合が円ですが，円の場合にはそれが三角関数になるということだけをここでは注意しておきます．

さて，ド・モアブルの公式の応用として方程式 $x^n = 1$ を解いてみましょう．あるいは $x^n - 1$ を因数分解するといっても同じことです（因数定理!）．まず注意したいのは $\theta = 2\pi = 360^\circ$ とおくと $e(2\pi) = 1$ となっている事実です．もちろん m を整数として $e(2m\pi) = 1$ でもあります．すると $\zeta = 2\pi/n$ とおけば，

$$e(\zeta)^n = e(n\zeta) = e\left(n\frac{2\pi}{n}\right) = e(2\pi) = 1$$

です．さらにまったく同様にして k を整数として

$$e(k\zeta)^n = e(n\zeta)^k = 1^k = 1$$

ですから $e(k\zeta)$ $(k \in \mathbb{Z})$ はすべて $x^n = 1$ の根ということになります!

あれれ？　何だか変ですよね．n 次方程式はたかだか n 個の根しか持たないはずでした．無限個の根があっては困るわけです．でもご安心ください．このうち相異なるものは $0 \leqq k < n$ に対応するちょうど n 個の複素数だけであとはこのいずれかに一致します．それは三角関数が周期 2π の周期関数

だからですね．n 次方程式 $x^n = 1$ の相異なる根が n 個あるわけですから，これらは重根にはなり得ません．したがって

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - e(k\zeta)), \qquad \zeta = \frac{2\pi}{n}$$

と因数分解できるというわけです．

以上は複素数の範囲で考えましたが，実数の範囲で因数分解するとどうでしょうか?　簡単のために $n = 2m+1$ つまり n が奇数の場合を考えましょう．すると $e(k\zeta)$ の複素共役は

$$\begin{aligned}\overline{e(k\zeta)} &= \cos k\zeta - i \sin k\zeta \\ &= e(-k\zeta) = e((n-k)\zeta)\end{aligned}$$

ですから k 番目の根と $n-k$ 番目の根が互いに複素共役になることがわかります．したがって

$$\begin{aligned}x^n - 1 &= (x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2 - (e(k\zeta) + e(-k\zeta))x + 1) \\ &= (x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos(k\zeta) + 1)\end{aligned}$$

です．両辺を $x-1$ で割ることにより次の公式が得られました．

$$\begin{aligned}&x^{2m} + x^{2m-1} + \cdots + x^2 + x + 1 \\ &\quad = \prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos(k2\pi/(2m+1)) + 1) \qquad (2.5)\end{aligned}$$

この式でさらに $x = 1$ としてみましょう．すると左辺は明らかに $2m+1$ です．右辺はどうなるでしょうか?　右辺の積の各因子は三角関数の倍角公式 $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ を使うと

$$\begin{aligned}1 - 2\cos(2k\pi/(2m+1)) + 1 &= 2(1 - \cos(2k\pi/(2m+1))) \\ &= 4\sin^2(k\pi/(2m+1))\end{aligned}$$

となります．この因子の積をとって，さらに両辺の平方根をとり，整理すると

$$\prod_{k=1}^{m} \sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right)\cdots\sin\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

となることがわかります．$x^n - 1$ の因数分解という一見簡単そうなことからこのような公式が導けてしまう．これが数学の凄いところであり，また面白いところです．

演習 2.8　上の式(2.5)で $x = -1$ とおくことにより次の等式を証明してください．

$$\prod_{k=1}^{m} \cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2^m}$$

演習 2.9　n が偶数のときには上の議論はどのようになるでしょうか?

演習 2.10　等比数列の和の公式

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

において $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくことにより，次の式を証明してください．

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin\theta/2} + 1\right)$$

本節では単なる記号として $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ を導入しました．このように記すと，指数関数との強い類似性を持つことをすでに注意しました

が，じつはオイラー[5]により $e(\theta)$ を指数関数 e^x の純虚数 $x = i\theta$ における値 $e^{i\theta}$ とみなせることが発見されています．つまり

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.6}$$

が成り立ち，これを発見者の名に因んで**オイラーの公式**とよびます．通常，数学書ではこの $e^{i\theta}$ という記号を用いますので，本書でも以下 $e^{i\theta}$ という記号に統一して使います．

§3　行列で複素数を表わす!?

複素数は負の数と共に長い間一般の人々の間に浸透しませんでした．その一つの理由に i という虚数単位を導入しなければいけなかったことがあります．このような数は存在しないのではないか?　そのような疑いが人々の自由な思考を妨げたわけです．もちろん一流の数学者たちは複素数を密かに，あるいは公然と用いていましたが，結果を発表するときには，実数の結果に言い換えてから発表するというようなこともよくあったようです．

諸君はこの虚数単位 i についてどう考えるでしょうか?　単なる方便でしょうか?　あるいはまったく新しく発見された数?　取り決め?　あるいは自然が与えたものではなく人間が作りだした数?　学校で先生が教えてくれたので漠然とあると信じていたのでしょうか?

複素数が発見されるまでに長い歴史が必要だったように，諸君の中で複素数が定着するのにもやはり時間がかかるかもしれません．また数学的な対象であるにもかかわらず，たとえば物理学の中の量子力学や電磁気学とよばれる分野を学んだ後ではまた意見が変わるかもしれません．

確かに虚数単位は複素数を導入するきっかけでした．しかし実数だけを

[5]Leonhard Euler（1707 – 1783）: オイラーはガウスに勝るとも劣らぬ数学の巨人といえるでしょう．オイラーは計算家の側面を持っていて，彼の手から生まれたおびただしい公式たちは後世になっていろいろな意味が与えられ，複素関数論，変分学，位相幾何学などの分野で今なお生き生きと活躍しています．28 歳にして右目を失明し，晩年には両眼共に盲目となりましたが，創作意欲は衰えず，大量の著作を残しました．オイラー全集は死後 200 年経つ今なお刊行中です．

扱っているつもりでも数学の中に奥深く分け入っていくにつれ複素数がたち現われること，あるいは虚数単位の持っている意味，別の実現の仕方についてすこし紹介しておきたいと思います．以下の話の中ではとくに行列と多項式が中心的な役割を果たしますが，まず行列について考えてみることにしましょう．

次の行列 J を考えます．

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

すると簡単な計算で

$$J^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1_2 = -(\text{単位行列})$$

がわかります．したがって $J^3 = -J, J^4 = 1_2$ となり，あとはこれの繰り返しですね．もちろん諸君はもう気付いていると思いますが，J は虚数単位 i と非常によく似ています．実際 a, b を実数として次のように対応させてみましょう．

$$\mathbb{C} \ni a + bi \longleftrightarrow a1_2 + bJ = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

するとこの対応によって

$$\begin{aligned}
&\text{複素数の足し算 } (a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i \\
&\leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \text{ 行列の足し算}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{複素数の掛け算 } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \\
&\leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} \text{ 行列の掛け算}
\end{aligned}$$

のように**演算までもが対応している**ことがわかります! このようなときこの対応は**演算を保存する**とか,（演算に関して）**準同型である**といいます.

このようにして複素数はじつは行列の中に自然と現われていることがわかります. ところが行列の係数は実数なのですから, そこには虚数単位などはありません. 純粋に実数の演算だけで複素数が実現されていることに注意してください.

一般に 2×2 行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対してその**行列式**（ぎょうれつしき）を

$$\det A = |A| = ad - bc$$

で決めましょう. もし $\det A \neq 0$ なら,

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$AB = BA = 1_2 = (\text{単位行列}) \tag{2.7}$$

となることが簡単な計算により確かめられます. 一般に(2.7)が成立するとき B を A の**逆行列**とよんで, $B = A^{-1}$ と書きます. つまり

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1_2$$

ですね. もちろん逆行列は A が与えられたときただ一つしか存在しません. また A が逆行列を持つための必要十分条件は $\det A \neq 0$ であることが容易に証明できます.

では複素数 $a + bi$ に対応する次の行列

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

では $\det C$ と C^{-1} はどうなるでしょうか?　まず $\det C = a^2 + b^2 = |z|^2$ であることがわかります．したがって $z \neq 0$ なら $\det C \neq 0$ で，C は逆行列を持ちます．さらにその時には，

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

で，これは確かに複素数

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

に対応する行列になっています．このように複素数の行列表示では行列式は $|z|^2$ に等しく，逆行列は逆数に対応していることがわかりました．

§4　多項式でも複素数は表わせる

複素数を多項式の割り算と余りを使って表わしてみましょう．まず実数 a, b に対して一次式 $a + bx$ を考えます．この一次式たちの間に足し算と掛け算を通常のように決めるのですが，足し算はまあよいとしても掛け算をすると二次式になってしまいますね．そこでその二次式を $x^2 + 1$ で割り算をしてその余りを考えることにします．具体的にやってみましょう．

$$\begin{aligned}(a+bx)(c+dx) &= ac + (ad+bc)x + bdx^2 \\ &= bd(x^2+1) + \{(ac-bd) + (ad+bc)x\}\end{aligned}$$

ですから余りは $(ac - bd) + (ad + bc)x$ になります．

あれ?　この式はどこかで見たことがありますね．そうです，これこそが複素数の掛け算の結果でした．ただし記号 x が虚数単位 i の役割を果たしていますが… 以下 多項式 $f(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $a + bx$ のとき

$$f(x) \equiv a + bx \mod (x^2+1)$$

と書くことにしましょう．すると上の式は

$$(a+bx)(c+dx) \equiv (ac-bd) + (ad+bc)x \mod (x^2+1)$$

と表わすことができます．このように表わすと複素数 $a+bi$ と $a+bx$ が一対一に対応していてしかもこの対応は足し算，掛け算という二つの演算を保存していることがよくわかると思います．

そこで多項式の性質を使って，たとえば複素数は逆数を持つということを確認してみましょう．もちろんそんなことはもうすでにやったことなのですが，多項式を使った新方式に慣れるためと，この後の話の準備をかねているので少し我慢してつきあってください．

まず実数の範囲では x^2+1 はこれ以上因数分解できませんので明らかに任意の一次式 $a+bx$ $(a,b\in\mathbb{R})$ と互いに素です．つまり共通因数を持たない．すると実数係数のある多項式 $p(x),q(x)\in\mathbb{R}[x]$ が存在して

$$p(x)(x^2+1)+q(x)(a+bx)=1 \tag{2.8}$$

とできるのでした（定理 1.4）．この両辺を x^2+1 で割った余りを考えましょう．すると $q(x)$ の余りを $c+dx$ と書けば，

$$(c+dx)(a+bx)\equiv 1 \mod (x^2+1)$$

が余りの間の等式として成り立ちます．$a+bx$ に掛けて 1 になるような複素数はつまり $1/(a+bx)$ のことですから，$(a+bx)^{-1}\equiv(c+dx) \mod (x^2+1)$ ということになります．

さてここまでは律義に「余り」として計算してきましたが，実際の計算ではじつは $x^2=-1$ として計算したほうがはるかに簡単です．つまり x^2+1 で割り算をしてその余りを考えるということと，$x^2+1=0$ と思って $x^2=-1$ として x^2 の項を消去するという操作は同じ結果を産み出すわけです!

同じようなことはすでに因数定理でも出会いました．あのときは $x-\alpha$ で割り算することと $x=\alpha$ を代入することが同じ結果を導いたのでした．このようにすると $x^2=-1$ という式と $i^2=-1$ は何等変わるところはないわけで，ますます複素数との同一視が簡単になります．しかし我々には多項式としての性質も同時に利用できる点がメリットです．

さて以上のような話はなにも x^2+1 に限ったことではなく，たとえば x^2-2 で割り算することは $x^2=2$ と思うことと同じになります．このとき

は $x=\pm\sqrt{2}$ ですね．あれれ？　しかしすでにもう $\sqrt{2}$ は実数の範囲では存在しますからこれは二重手間です．しかもこの時は

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=x^2-2\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(x^2-2)$$

となって，二つの "数" $x\pm\sqrt{2}$ を掛けるとゼロになってしまうという事態が起こります．したがって足し算とか掛け算は $\mathrm{mod}\,(x^2-2)$ で考えるということでちゃんと計算できますが，不幸なことにこの代数系ではゼロでない二つの元を掛けるとゼロになってしまうかもしれない．そのような元のことを**零因子**とよんでいます．だいたい方程式を解くときには「 $ab=0$ なら $a=0$ または $b=0$ 」というような性質をよく使いますので零因子が存在するととても厄介です．

ところが係数を有理数 $\mathbb{Q}$ にすると事情が一変します．有理数の範囲では x^2-2 は因数分解できませんので，任意の（有理数係数の）一次式とは互いに素です．したがって（2. 8）式と同様に考えて，$a+bx\neq 0$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ に対して

$$p(x)(x^2-2)+q(x)(a+bx)=1$$

となるような多項式 $p(x),q(x)\in\mathbb{Q}[x]$ が存在します．両辺を $\mathrm{mod}\,(x^2-2)$ で考えると $q(x)\equiv c+dx \mod (x^2-2)$ とおいて

$$(c+dx)(a+bx)\equiv 1 \quad \mathrm{mod}\,(x^2-2)$$

です．したがって $a+bx$ はもはや零因子ではありません．これを確かめておきましょう．

もし $(a+bx)(r+sx)\equiv 0$ $(r,s\in\mathbb{Q})$ となっていれば，両辺に $c+dx$ を掛けると $0\equiv(c+dx)(a+bx)(r+sx)\equiv 1\cdot(r+sx)=r+sx$ となり $r+sx=0$ が結論できます．つまり積が零なら一方が零であるという一般常識（？）が成り立ちます．

このようにして考えた代数系 $\mathbb{Q}[x]\,\mathrm{mod}\,(x^2-2)$ はじつは $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$ と同じもので，零で割ることを除いて四則演算が自由にできます．このように四則演算が自由にできるような代数系のことを**体**とよんでいます．

定理 2. 11　二次式 $d(x)$ が有理数の範囲で因数分解できなければ，一次式の全体 $\{a+bx \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ に mod $d(x)$ で演算を定義したものは体になります．

証明は $d(x)=x^2-2$ の場合とほとんど同じですから諸君自身が確認してみてください．ところで実数の範囲で因数分解できない二次式は x^2+1 以外にも数多く存在します．たとえば x^2+x+1 なんかがそうですね．しかし別の二次式で代数系を作ってもそれはやはり複素数と同じものになってしまいます．この点で実数と有理数とは根本的に異なります．

演習 2. 12　有理数の範囲では因数分解できない多項式はいくらでも次数の高いものが存在します．たとえば $T(x)=x^3+x^2-x+1$ などは因数分解できません．(因数分解できないことを示してください．) さてこの多項式 $T(x)$ で割った余りを用いて代数系 $\mathbb{Q}[x] \bmod T(x)$ を考えましょう．この代数系は体になることを示してください．たとえば $x+1$ の "逆数" は何になるでしょうか?

じつは個々の式とは無関係に

> **$f(x)$ が有理数の範囲で因数分解できなければ**
> **$\mathbb{Q}[x] \bmod f(x)$ は体になる**

ことが証明できます．これは定理 2. 11 の一般化です．これについてはたとえば [15] をご覧ください．

演習 2. 13　行列 A, B を

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

とおくと $AB=BA=O_2=$ (ゼロ行列) ですから A, B は零因子です．この他に 2×2 行列の零因子を見つけてください．じつは A が零因子である

ことと逆行列を持たないことは同値です．

§5 二変数多項式が定める曲線

複素数で考えるメリットはこのような因数分解についてだけではありません．たとえば $x^2+y^2+1=0$ を考えてみましょう．通常 $f(x,y)=0$ という方程式を満たすような数の組 (x,y) は平面上の曲線を描きます．しかし今の場合この方程式を満たす実数の組は明らかに存在しません．

しかし範囲を複素数まで広げると，確かにこの方程式を満たす二つの複素数の組が存在します．たとえば $(x,y)=(0,\pm i),(1,\pm\sqrt{2}i)$ などというように．一般に $y=\pm\sqrt{-(x^2+1)}$ ととればよいわけですね．もちろんここで平方根 $\sqrt{z}$ $(z\in\mathbb{C})$ は**複素数の平方根**で，二乗すると z になるような複素数を表わします．このような複素数は二つ存在して一方はもう一方の -1 倍になります．

代数学の基本定理を使うともっと一般に次のことがわかります．

定理 2.14 $f(x,y)$ を定数でない多項式とすると，$f(x,y)=0$ を満たす複素数が無限に存在します．

［証明］ 与えられた多項式に $x=\alpha\in\mathbb{C}$ を代入しましょう．すると $f(\alpha,y)$ は y の多項式となります．すると代数学の基本定理によって方程式 $f(\alpha,y)=0$ は少なくとも一つの解 $y=\beta$ を持ちます．つまり $f(\alpha,\beta)=0$ ですね．このとき α のとり方は任意ですから，このような組 (α,β) の個数は少なくとも複素数全体 $\mathbb{C}$ と同じ個数だけはあります．したがって，そのような組は無限個あることになります． ■

2 変数の多項式 $f(x,y)=0$ で決まる $\mathbb{C}^2$ 内の曲線についてもう少し考えてみましょう．あ，少し難しかったかもしれませんが，$\mathbb{C}^2$ というのは二つの複素数の組 (α,β) の全体のことです．集合の記号で表わすと

$$\mathbb{C}^2=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{C}\}$$

ということになりますね．

「曲線」と書いたのは実数の場合に曲線になっているからで，その類似を頭の中にイメージしています．もちろんこれは通常の意味の曲線ではなく実座標で考えると「曲面」とよぶほうがふさわしかったりするのですが，ここではあえて曲線とよんでおきましょう．

さて $f(x,y)$ をまず y について整理します．

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)y^k \quad (a_k(x)\in\mathbb{C}[x])$$

このとき $a_n(x)$ つまり y の最高次の係数はまた x の多項式ですから，その次数を m とすれば，代数学の基本定理によってたかだか m 個の複素数を除くと $a_n(x)\neq 0$ としてよいことがわかります．さらにそのような x を固定すれば，y についての方程式 $f(x,y)=0$ はちょうど n 個の根を持ちます．

もちろんこの n 個の根は重根を重複度を込めて数えなければいけませんが，ここで**判別式**が役に立ちます（少し前後しますが，第 4 章 §2 参照）．$f(x,y)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x,y)$ の判別式 D (今は x を定数と考えていますから，y についての判別式です) がゼロでないことです．一方 D は y の各次数の係数 $\{a_k \mid 0\leqq k\leqq n\}$ の多項式として表わされることが知られています．このことから今の場合

$$\begin{aligned}D&=D(a_1,a_2,\cdots,a_n)\\&=D(a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x))=(x\text{ の多項式})\end{aligned}$$

であることがわかります．したがって $D=0$ となるような x の値は有限個しかなく，ほとんどの場合に方程式 $f(x,y)=0$ は y について相異なる n 個の根を持ちます．

つまり有限個の x の値を除けば $f(x,y)=0$ となるのは $(x,\beta_1),\cdots,(x,\beta_n)$ という相異なる n 個の点であることがわかりました．このように相異なる点同士だと x を少し変化させたとき β_k がどのように変化するのかが追跡できます．したがってこれらは x の関数になる，つまり $(x,\beta_k(x))$ という

わけです．

この関数 $\beta_k(x)$ がどのような関数であるかという問題は突き詰めて考えるととても面白い問題で，19 世紀の天才リーマン[6]は今日**リーマン面**とよばれる曲面（我々のよび方では曲線でしたが）を考え出したのでした．しかし残念ながらリーマン面の話はもう本書の守備範囲を大幅に逸脱してしまいます．このような話に興味のある人はたとえば［17］，［25］などを読んでみられるとよいでしょう．

幾何学的なイメージを持ってもらうためにもう少し繰り返しますと，（都合よく）固定した $x \in \mathbb{C}$ の周りでは $f(x, y) = 0$ で定められた曲線は相異なる n 個の円板をあわせたものです．x を動かしてゆくとこの円板も動いてゆき，n 枚の複素平面（の一部）のシートを形作ります．このシートたちはしかし有限個の x については接していたり，あるいは交わったりしていてそのあたりではとても複雑な振る舞いをします．

このようにとても複雑な振る舞いをする点のことを**特異点**（とくいてん）とよびます．特異点はいわば扱いにくい点のことですが，数学的には豊富な内容を含んでいて

特異点こそ面白く，研究するに値する点だ

ということがいえると思います．平坦で何事も起こらない人生は面白くもなんともありません．最近は好んでそのような人生を送ろうとする若い人もいるようですが，人生の特異点において諸君がどのような生き方をするのかが一番重要なことなのだと思います．オオッ，カッコイイ!!?

---

[6] Georg Friedrich Bernhard Riemann（1826 – 1866）：主に複素関数論を研究しましたが，リーマン幾何学，リーマン積分など他分野への影響も多大なものを持っています．またリーマン予想は約 100 年たつ今でも解けていない大問題の一つです．

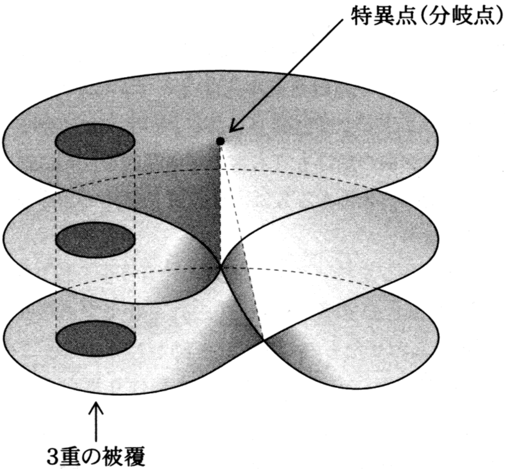


図 **2.1**　3 重の被覆になっているリーマン面.

第 3 章……………………

二項係数

さてこの章では二項係数について少し調べてみることにしましょう．**二項係数**というのは**二項展開**に現われる係数のことで，数式で定義するなら次のようになります．

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$

この式は，左辺を展開したときの t^k の係数が $\binom{n}{k}$ で表わされる，という意味に解釈してください．この整数 $\binom{n}{k}$ が二項係数です．よく知られているように二項係数 $\binom{n}{k}$ は互いに異なる n 個のものの中から k 個のものを選びだしてくる組み合わせの数 ${}_nC_k$ と等しく，階乗を使って書くと

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

で与えられるます．

こんなものが何か面白いのかと思うかもしれませんが，この二項係数は深く調べていけばいくほど奥深くなっていくような数の一つです．もちろん個々の数自体にはあまり意味はありませんが，ある種の和公式，あるいは漸近的な挙動などでその真価を発揮します．

§1　二項展開とライプニッツの公式

まず二項係数の定義式

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \tag{3.1}$$

にもどりましょう．この式を**二項展開式**あるいは単に**二項展開**とよびます．もちろん二変数ある場合にもこの式は使えます．

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

ですね．記号は ${}_nC_k$ を使っているかもしれませんが，諸君は二項展開をよく知っていると思います．ここでは証明のかわりに**パスカルの三角形**[1]とよばれている二項係数を並べた三角形を書いておきましょう．この三角形を見

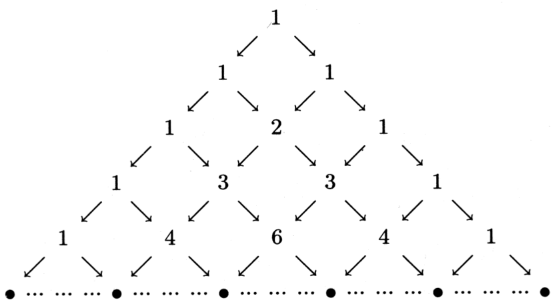


図 3.1 パスカルの三角形

ると二項係数の間に

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

という漸化式が成り立っていることがよくわかると思います．この漸化式が二項係数を決めているわけですが，数学のいろいろな局面で同じ漸化式が現われます．そのため二項係数も数学のいろいろな場面で使われることになるわけです．

[1] Blaise Pascal（1623 – 1662）

パスカルの三角形が出てくるもう一つの有名な例は高次導関数に関するライプニッツの公式です．

定理 3.1（ライプニッツの公式） $f(x), g(x)$ をそれぞれ n 階微分可能な関数とします．するとその積の微分は次のように表わされます．

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x)$$

［証明］ 次の三角形を見ると，やはり微分したものの係数が 2 項係数と同じ漸化式をみたすことがわかります．なお各ステップに使われているのは単なる積の微分の公式にすぎません．

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & fg & & & & & & & \\
 & & & & & & \swarrow & & \searrow & & & & & & \\
 & & & & & f'g & & + & & fg' & & & & & \\
 & & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & & & \\
 & & & f''g & & + & & 2f'g' & & + & & fg'' & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & f'''g & & + & & 3f''g' & & + & & 3f'g'' & & + & & fg''' & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
\bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \ \cdots & \cdots\ \cdots & \bullet
\end{array}$$

■

例 3.2 $f(x) = (ax+1)^n e^x$ の n 階微分を計算してみましょう．

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (ax+1)^n \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{n!}{(n-k)!} (ax+1)^{n-k} e^x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k! a^k (ax+1)^{n-k} e^x
\end{aligned}$$

最後の式で $x = 0$ とおくと，

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k! a^k$$

であることがわかります.

§2　二項係数の公式

簡単な二項係数の関係式でとてもよく知られているものには，たとえば次のような式があります.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

この式は単に二項係数の定義式(3.1)においてそれぞれ $t = 1, t = -1$ とおけば得られます．この二つの式はとてもシンプルで美しいのですが，もう少し複雑な式も考えてみましょう.

$n \leqq m$ を二つの自然数とします．等式 $(1+t)^{n+m} = (1+t)^n(1+t)^m$ の両辺の展開式を考えてみます．左辺は簡単ですね.

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} t^k$$

です．右辺はどうなるのでしょうか?

$$(\text{右辺}) = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} t^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{m}{j} t^{i+j}$$

と計算できますね．ここで左辺と比較するために $i + j = k$ とおいてまとめ直してみましょう．すると

$$\begin{aligned}(\text{上式}) &= \sum_{k=0}^{n+m} \left\{ \sum_{\substack{0 \leqq i \leqq n, 0 \leqq j \leqq m \\ k=i+j}} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \right\} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left\{ \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right\} t^k \qquad (3.2)\end{aligned}$$

です．この式に出てくる二番目の総和記号は，なかなかアジな書き方がされていますね．このように総和記号の下の部分にどのような範囲の i, j についての和をとるのか，また i, j の満たすべき条件式を書くこともあります．この書き方はとても便利で慣れるとやめられなくなってしまいます．

ところで総和記号の書き方は別にして，(3.2)式の最後の部分は式変形がちょっと難しいと思います．これは次のように考えてください．まず $i+j=k$ なので自由に動くのは i, j の一方のみです．では i はどの範囲で変化するかというと，まず $0 \leqq i \leqq n$ という条件が最初からありました．また $k-m \leqq i = k-j \leqq k$ でもあります．そこで不等号の両端の値を考慮すると $\max(0, k-m) \leqq i \leqq \min(n, k)$ となるわけです．ここで $\min(\ldots)$ は … のうち最小のもの，max の方は最大のものという意味の記号です．i が決まれば $j = k - i$ ですから，結局最後の式のように書くことができます．

このように書いておくと，t^k の係数を比較しやすいですね．この係数は両辺で同じはずですから，

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

となります．この式はかなり複雑ですが，たとえば $k=n$ とおいてみましょう．すると $\min(n,k)=n$, $\max(0,k-m)=\max(0,n-m)=0$（ここで $n \leqq m$ と仮定したことを思い出してください）となりますから，

$$\binom{n+m}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{n-i}$$

となることがわかります．この式でさらに $n=m$ とおいてみましょう！すると

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \qquad (3.3)$$

という式が得られます．総和記号の変数を i から k に書き換えました．前に使った k とは無関係ですから惑わされないようにしてください．左辺の二項係数を特に**中央二項係数**（ちゅうおうにこうけいすう）とよびます．中央二項係数はなかなか面白い性質を持っています．

この他にも二項係数の満たす関係式は星の数ほどもあります．たとえば次のような公式はどうでしょうか? だんだんと二項係数の神秘が伝わってきたでしょうか?

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\binom{2n}{2k} = \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{1}{18}\pi^2$$

演習 3. 3　$x^{2n} = x^n \cdot x^n$ の両辺をライプニッツの公式を使って n 階微分してください．そのあと $x = 1$ とおけば，(3. 3) の別証が得られます．

§3　三角関数と二項係数

さて二項展開の三角関数への応用を考えてみます．鍵になるのは累乗に関するド・モアブルの公式です（§2 参照）．それは次のような等式でした．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{3. 4}$$

左辺は二項展開できますから実行してみると

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\ \sin^k\theta \\ &= \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{2m}\cos^{n-2m}\theta\ \sin^{2m}\theta \\ &\quad + i\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^m\binom{n}{2m+1}\cos^{n-2m-1}\theta\ \sin^{2m+1}\theta\end{aligned}$$

ただし $[x]$ は x を越えない最大の整数を表わし，ガウス記号とよばれています．この式と (3.4) 式の右辺と，実部・虚部を比較すると次の n **倍角の公式**が得られます．

$$\cos n\theta = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{2m}\cos^{n-2m}\theta\ \sin^{2m}\theta$$

$$\sin n\theta = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^m\binom{n}{2m+1}\cos^{n-2m-1}\theta\ \sin^{2m+1}\theta$$

$\cos n\theta$ の展開式は x の多項式 $T_n(x)$ を

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{2m}x^{n-2m}(1-x^2)^m$$

と決めると $T_n(\cos\theta)$ になっています．この多項式 $T_n(x)$ を**チェビシェフの多項式**[2]とよびます．チェビシェフの多項式はこの他にも関数を多項式近似するときの誤差項として現われたりします．

演習 3.4　$\cos 2n\theta$ および $\sin 2n\theta$ の展開式が次のようになることを示してください．

[2] Pafnutij L'vovich Chebyshev（1821 – 1894）

$$\cos 2n\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\left\{\sum_{m=0}^{k}\binom{2n}{2m}\binom{n-m}{n-k}\right\}\cos^{2k}\theta$$

$$\sin 2n\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left\{\sum_{m=0}^{k}\binom{2n+1}{2m+1}\binom{n-m}{n-k}\right\}\sin^{2k+1}\theta$$

三角関数の積分においては $\cos^n\theta, \sin^n\theta$ といった三角関数のべき乗の式を $\cos k\theta, \sin k\theta$ といったべき乗を含まない関数の一次結合として表わすと便利なことがよくあります．このような変形も二項展開を使うと簡単です．まず

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

と書きましょう．すると

$$\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \quad z\overline{z} = 1$$

であることがわかります．したがって

$$\begin{aligned}\cos^n\theta &= \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\overline{z}^{n-k}\\ &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{k-(n-k)}\\ &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(2k-n)\theta + i\sin(2k-n)\theta)\end{aligned}$$

です．ところが左辺はもともと実数なのですから上式の虚部の和はゼロになっているはずです．したがって

$$\cos^n\theta = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k-n)\theta \qquad (3.5)$$

となることがわかりました．今までなにげなく計算していたかもしれませんが，このようなところにも二項係数が現われてくるわけですね．

さてこの式を積分の計算に応用してみましょう．n が偶数のときに (3.5) 式の両辺を $[0,\pi]$ で積分します．

$$\int_0^\pi \cos k\theta d\theta = 0 \quad (k \neq 0)$$

であることを用いると，右辺の和の各項のうち積分してゼロでないのは定数項だけです．すると

$$2^n \int_0^\pi \cos^n \theta d\theta = \binom{n}{n/2} \pi$$

となって右辺には中央二項係数が現われることがわかります．

演習 3. 5　$\sin^n \theta$ についても同様に $\sin k\theta$ の形の三角関数の和として表わしてみてください．

二項係数にはこの他にも，一般化された二項展開式

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \ (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

とか，ベルンシュタイン多項式の話題など面白いことがたくさんあります．興味を持った人は［10］,［13］などを読むとよいと思います．

第 4 章

対称式

二変数の対称式については第 1 章でも扱いましたが，この章では少し本格的に多変数の対称式について調べることにしましょう．三変数の場合を例として取り上げますが，本質的には三変数の場合の議論はそのまま次章で n 変数にまで拡張されます．

対称式が数学史上に登場するのは，方程式の**解と係数の関係**を通じてでした．二次方程式の解と係数の関係の歴史は，バビロニアまでさかのぼるといわれいますが，それよりも高次な場合はやっと 16 世紀になってヴィエトによって研究されたのが最初とされています．

この 16 世紀はカルダノ[1]，タルターリャ[2]，フェラーリ[3]といった人達によって 3 次，4 次の方程式の一般解法が発見されるなどまさに方程式の世紀といえるような時代でした．もっともこのあと長い停滞の時期を経て，5 次方程式以上の理論に行き着くためには 19 世紀のガロア[4]を待たなければいけなくなるのですが …

---

[1]Girolamo Cardano（1501 – 1576）: イタリアの医師，哲学者，占星術師，そして数学者．彼の著書アルス・マグナ（「偉大なる技術」の意）にフェッロ，タルターリャによる 3 次方程式の解法，そしてフェラーリによる 4 次方程式の解法が記載されました．

[2]Tartaglia（1506? – 1557）: 本名 Niccolò Fontana，タルターリャは通称で，どもりの意．

[3]Ludovico Ferrari（1522 – 1565）

[4]Evariste Galois（1811 – 1832）

§1　解と係数の関係

歴史に従って，まず 3 次方程式の解と係数の関係から見てみることにしましょう．t についての 3 次方程式

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0 \tag{4.1}$$

を考え，その三つの解を x_1, x_2, x_3 としましょう．もしこれらが重根の場合にはその重複度も込めて考えることにします．つまり

$$t^3 + at^2 + bt + c = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) = 0 \tag{4.2}$$

です．右辺を展開して両辺の t^k $(k = 0, 1, 2)$ の係数を比較することにより 3 次方程式の解と係数の関係が得られます．

$$\begin{cases} a &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ b &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ c &= -x_1x_2x_3 \end{cases} \tag{4.3}$$

2 次方程式の場合よりも少し複雑ですね．解と係数の関係における著しい性質は各係数が $\{x_1, x_2, x_3\}$ について対称であるという点です．もともとの方程式(4.2)が明らかに根の間の置換によって不変ですから，各係数もやはりそのような置換で不変になるわけです．各係数の符号を調節して

$$\begin{cases} e_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ e_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ e_3 &= x_1x_2x_3 \end{cases} \tag{4.4}$$

とおき，これを**基本対称式**とよびます．

対称式というのは 3 次の対称群（たいしょうぐん） $\mathfrak{S}_3$ の作用で不変になるような式のことをいいます．何だか少し難しそうですね．$\mathfrak{S}_3$ というのは[5]，三つの文字の

[5] この変なくねくねした文字 $\mathfrak{S}$ は S に相当するドイツ語のヒゲ文字とよばれる装飾文字です.「対称」を意味する symmetric の頭文字をとって S_3 で 3 次対称群を表わしているわけです.

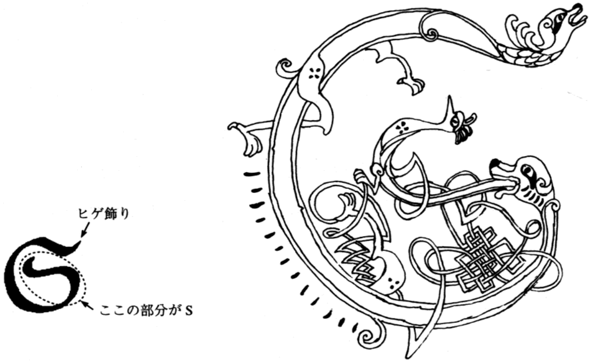


図 4.1 ドイツ文字 $\mathfrak{S}$ の図．古代プロゲータ地方で使われた数学書『リーの予言者（Book of Lie）』に現われる装飾ヒゲ文字

入れ替え(= **置換**)の全体のなす群で，次のような 6 個の元から構成されています．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

この記号の意味は上段の数字をそれぞれ下段の対応する数字に写すということで，たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ なら

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

というような $\{1,2,3\}$ の置換を表わしています．今はさしあたり「群」という言葉は気にしないでおきましょう．

$\mathfrak{S}_3$ は平面上の正三角形を不変にするような平面上のユークリッドの変換全体とみなすこともできます．正三角形を不変にするような変換は

（ア）正三角形の重心を中心とする，角 $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ の回転と
（イ）各頂点とその対辺の中点を通る直線に関する折り返し
の 6 個が考えられます（下図参照）．このような変換は頂点の間の置換を引き起こしますから，正三角形の頂点に図のように番号を振っておくと，これらがちょうど $\mathfrak{S}_3$ の 6 個の置換に対応していることが容易に確かめられるでしょう．本当はこれを空間座標 (x_1, x_2, x_3) を用いて表わしたほうがよくわかるのかもしれませんが．

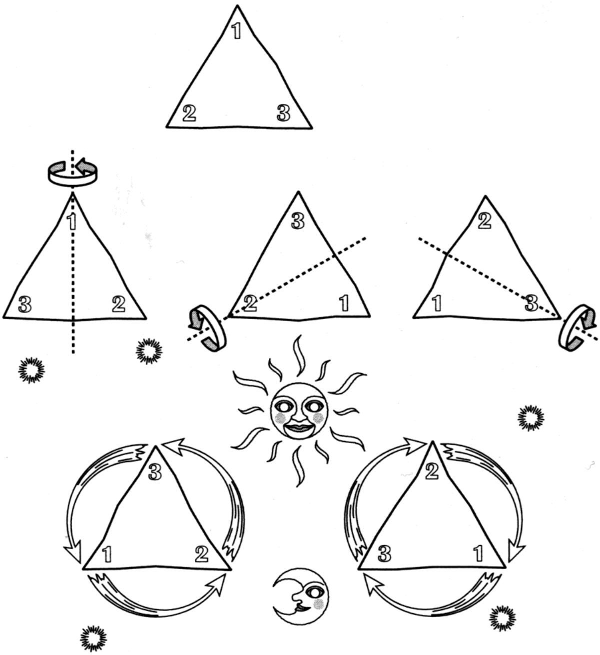


図 4.2　正三角形を不変にする 6 個の変換

さて $\mathfrak{S}_3$ の対称式は基本対称式以外にもたくさんあります．代表的なのは次のべき**乗和多項式**（じょうわたこうしき）でしょう．

$$\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = e_1 \\
p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
p_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\
&\vdots \\
p_k &= x_1^k + x_2^k + x_3^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

p_1 は e_1 と一致していますが，$p_2, p_3, \cdots$ は基本対称式とはかなり違っています．またこれで対称式が無限にたくさんあることもわかりますね．さて p_k は確かに基本対称式とは異なっているのですが，じつは基本対称式を用いて表わすことができます．

定理 4.1 べき乗和多項式 p_k $(k \geqq 1)$ は基本対称式の多項式として表わすことができます．

［証明］ まず $p_1 = e_1$ ですからこれは問題ありません．また計算すればすぐわかるように $p_2 = e_1^2 - 2e_2$ です．そこで $k \geqq 3$ として p_k を考えることにしましょう．

x_i は 3 次方程式（4.1）の根なので

$$x_i^3 + ax_i^2 + bx_i + c = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満足します．そこでこの式の両辺に x_i^{k-3} を掛けてから三つの式を辺々加えますと

$$\begin{array}{rrcl}
 & x_1^k + ax_1^{k-1} + bx_1^{k-2} + cx_1^{k-3} & = & 0 \\
 & x_2^k + ax_2^{k-1} + bx_2^{k-2} + cx_2^{k-3} & = & 0 \\
+) & x_3^k + ax_3^{k-1} + bx_3^{k-2} + cx_3^{k-3} & = & 0 \\
\hline
 & p_k + ap_{k-1} + bp_{k-2} + cp_{k-3} & = & 0
\end{array}$$

ですが，各係数は基本対称式で表わされる（解と係数の関係）わけですから，結局

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} - e_3 p_{k-3} = 0 \quad (k \geqq 3)$$

となります．ただしここで $p_0 = 3$ とおきました．この式は p_k についての4項漸化式と見ることができます．すでに p_2, p_1, p_0 は基本対称式の多項式として表わされているわけですから，この漸化式と合わせると p_k についてもやはり基本対称式の多項式に書けることがわかります． ■

じつはもっと強く次の定理が成り立ちます．

定理 4.2 任意の対称式は基本対称式の多項式としてただ一通りに表わすことができます．つまり次の代入写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] & \longrightarrow & S(x_1, x_2, x_3) \\ & \Psi & & \Psi \\ & f(y_1, y_2, y_3) & \longmapsto & f(e_1, e_2, e_3) \end{array}$$

は全単射です．ただし $\mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$ は3変数 $\{y_1, y_2, y_3\}$ の多項式環，$S(x_1, x_2, x_3)$ は対称式の全体を表わします．

［証明］ この定理は2変数の場合の定理1.18とほぼ同様にして示すことができます．ここではその概略を示すにとどめておきます．

単射性は $\varphi f = 0$ なら $f = 0$ を示すことに帰着します．ところが解と係数の関係と代数学の基本定理により，任意に与えた3次方程式の係数 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に対して，その係数を与えるような三つの根の組 $\{x_1, x_2, x_3\}$ が存在します．つまり，任意の三つの複素数の組 (y_1, y_2, y_3) が基本対称式のとる値の組として実現できることになりますから，$(\varphi f)(x_1, x_2, x_3) = 0$ なら $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ です．

全射性について述べておきましょう．単項式 $x_1^i x_2^j x_3^k$ $(i \geqq j \geqq k \geqq 0)$ の対称化 s_{ijk} を考えます．つまり

$$s_{ijk} = \sum_{(m_1, m_2, m_3)} x_{m_1}^i x_{m_2}^j x_{m_3}^k$$

です．ここに和は $(1,2,3)$ のすべての順列 (m_1, m_2, m_3) に関する和です（したがって6個の項を持ちます）．すると簡単な計算により s_{ijk} は3次の基

本対称式 e_3 とべき乗和多項式を用いて

$$s_{ijk} = e_3^k(p_{i-k}p_{j-k} - p_{i+j-2k})$$

と表わせることがわかります．一方べき乗和 p_k は基本対称式の多項式だったわけですから s_{ijk} もそうです．あとはすべての対称式がこの s_{ijk} の和（一次結合）として表わすことができることがわかればよろしい．しかしこれはほぼ明らかでしょう． ■

この定理は

> **根の多項式がいつ係数の多項式として表わすことができるか?**

という問題に対する答です．もちろん答は「根の対称式」だったら表わせる，ということになりますね．我々は 2 次式と 3 次式の場合にだけ考察してきましたが，この結論は n 変数の多項式についても正しいことがわかっています．さらにガロアは一般の方程式ではなく，特定の係数を持つ個別の方程式に対して成り立つ一般的な理論を考え出しました．それは 19 世紀初頭のことです．いまや彼の理論はよりいっそう精密化され，**ガロア理論**とよばれて，現代数学にとってなくてはならない理論の一つとなっています．

演習 4.3　空間内で正 4 面体を考えます．このときユークリッドの変換であってこの正 4 面体を保つようなものは $24 = 4!$ 個しかありません．このような変換は各頂点がどのように移動するかで決まってしまうこと，そのように考えると自然に 4 文字の置換の全体と一致することを示してください．このようにして 4 次の対称群 $\mathfrak{S}_4$ を**正 4 面体群**として捉えることができます．

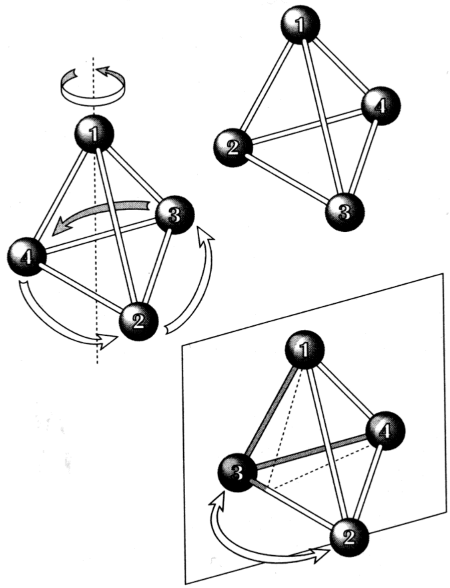


図 4.3　正 4 面体群の図

§2　判別式

3 次方程式 $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ の三つの根を x_1, x_2, x_3 と書きましょう．この三つの根の**差積**(させき)を次のように定義します．

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

この多項式はさまざまな場面で現われます．いろいろと役に立つこともあって，たとえば $\Delta = 0$ なら少なくとも方程式が重根を持つことがわかります．Δ はその形から対称式に非常に近いのですが，残念ながら対称式というわ

けではありません．たとえば x_1, x_2 を入れ替えると -1 倍されるからです．

$$\Delta(x_2, x_1, x_3) = -\Delta(x_1, x_2, x_3)$$

他の添字についてもまったく同様で二つの変数を入れ替えると Δ は -1 倍されます．

では対称式と関連づけるにはどうすればよいでしょうか？ もうおわかりですね，単に二乗すればよいのです．

定義 4.4 対称式 $D = \Delta^2$ を 3 次方程式の**判別式**とよびます．

判別式の性質を挙げておきましょう．

定理 4.5 D を 実数を係数とする3 次方程式

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0 \tag{4.5}$$

の判別式とします．このとき D は方程式の係数の多項式として表わされ，

（1） $D = 0$ なら方程式は重根を持ちます．

（2） $D > 0$ なら方程式は相異なる 3 実根を持ちます．

（3） $D < 0$ なら方程式は 1 実根と二つの共役な複素数根を持ちます．

［証明］ 判別式 D は対称式ですから基本対称式，つまり方程式の係数の多項式として表わすことができます．したがって特に実数値です．また $D = 0 \iff \Delta = 0$ で，このとき重根を持つことはすでに注意しました．

実数係数の 3 次方程式は必ず一つの実根を持ちますから，すべてが実根（3 実根）か，または一つだけが実根で残り二つが共役複素数かのいずれかです．すべて実根のときには明らかに $D = \Delta^2 \geqq 0$ です．一方 x_1 が実根で $x_3 = \overline{x_2}$ とすれば，

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - \overline{x_2})(\overline{x_2} - x_1) = -|x_1 - x_2|^2(2i \operatorname{Im} x_2)$$

となっています．ただし $\operatorname{Im} x_2$ で x_2 の虚部を表わしました．これを二乗して，

$$D = -4(\mathrm{Im}\ x_2)^2|x_1 - x_2|^4 \leqq 0$$

となります．これで定理のすべての場合が得られました． ■

すでに注意したように判別式 D は対称式ですから，方程式(4.5)の係数 a, b, c の多項式として書き表わすことができます．そこで具体的に判別式を書き下してみましょう．

計算を簡単にするために 3 次方程式の一般形を少し変形しておきます．$t^3 + at^2 + bt + c = 0$ において $t = x - a/3$ と置換するとこの方程式は x を未知数として

$$x^3 + Ax + B = 0 \tag{4.6}$$

の形になります．この方程式の根はもとの方程式の三つの根の $a/3$ だけの平行移動であって，重根の条件とか，あるいは実根であるかどうかなどの性質は(a が実数なら)もとの方程式のものとまったく同じです．しかもこの場合には基本対称式の一つ e_1 がゼロになっていますから，かなり議論が簡単になるのです．

定理 4.6 3 次方程式(4.6)の判別式は次のように係数 A, B の多項式で表わされます．

$$D = \Delta^2 = -27B^2 - 4A^3$$

[証明] 3 次方程式の三つの根を x_1, x_2, x_3 としましょう．すると

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = A,$$

$$e_3 = x_1x_2x_3 = -B$$

です．さて対称式はすべて基本対称式の多項式として表わされるのでしたが，判別式 D の次数は 6 ですから，基本対称式の 6 次式になるような組合わせしか現われません．そのような組合わせは

$$e_3^2,\ e_3e_2e_1,\ e_3e_1^3,\ e_2^3,\ e_2^2e_1^2,\ e_2e_1^4,\ e_1^6$$

の 7 通りがあります．しかし今は $e_1=0$ なのですからこのうち e_3^2 と e_2^3 の 2 通りしか現われません! このような議論のためにわざわざ方程式を変形しておいたわけです．そこで

$$D=\alpha e_3^2+\beta e_2^3 \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}) \tag{4.7}$$

と書いておきましょう．この α,β を決定すれば証明は終わりです．

この二つの係数を決定するためには $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,-1),(1,1,-2)$ とおいてみればよろしい．このようにおくと

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,-1)\quad \text{のとき}\quad D=(-2)^2,\ e_2=-1,\ e_3=0$$

したがって (4.7) 式に代入すると $4=\beta(-1)^3$，これより $\beta=-4$ です．

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,1,-2)\quad \text{のとき}\quad D=0,\ e_2=-3,\ e_3=-2$$

これを (4.7) 式に代入して $0=\alpha(-2)^2+\beta(-3)^3$ です．これより $\alpha=27\beta/4=-27$ であることがわかります． ■

§3 割り算でも判別式は出る

前節では直接判別式を計算しましたが，方程式が重根を持つという条件は次のようにも解釈できます．

まず方程式 $x^3+Ax+B=0$ が $x=\alpha$ で重根を持てば，三次関数を $f(x)=x^3+Ax+B$ とおくと $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ です．つまり重根を持つ条件は

$f(x)$ と $f'(x)$ が共通解を持つ

ということです．さらにこの条件は $f(x)$ と $f'(x)$ が共通因数を持つという条件とも同じですね．数学においてはこのように同じ条件をさまざまな形で言い換えてみることも大事です．

そこで重根を持つという条件を最後の形，つまり「$f(x)$ と $f'(x)$ が共通因数を持つ」という形で考えてみましょう．この形では要するに共通因数が何かがわかればよいのですから**ユークリッドの互除法**が便利です．まず $f(x)$ を $f'(x) = 3x^2 + A$ で割った余りを求めてみます．

$$f(x) = \frac{x}{3} f'(x) + \left(\frac{2A}{3}x + B\right)$$

したがって $f(x)$ と $f'(x)$ が互いに素でないのなら $f'(x)$ は余り $(2A/3)x+B$ で割り切れる必要があります．もし $A \neq 0$ ならこれは $f'(-3B/2A) = 0$ と同値で，

$$f'(-3B/2A) = 1/4\,\frac{27\,B^2 + 4\,A^3}{A^2} = 0,$$
$$\therefore \quad 27B^2 + 4A^2 = 0$$

であることがわかります．（$A = 0$ の場合も含めて）これが十分条件になっていることも逆をたどっていけば明らかでしょう．

§4　3 次方程式の解き方

この章ではラグランジュが考えた 3 次方程式の解き方を紹介します．方程式は簡単化されたもの

$$x^3 + Ax + B = 0 \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

の形で考えます．この方程式の三つの解を x_1, x_2, x_3 として，さらに x_1 は実数と仮定しておきます．

まず ω を 1 の 3 乗根で，1 ではないものとしましょう．このようなものは二つありますが，ここでは

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} = e^{2\pi i/3}$$

ととることにします((2.6)式参照)．そうするともう一方の3乗根は $\omega^2 = 1/\omega = \overline{\omega}$ と表わされます．さて，この ω を使って，

$$\begin{cases} u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ v = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \end{cases}$$

とおきます．こうおいておくと，$\mathfrak{S}_3$ の元のうち回転に相当するものでは u, v はそれぞれ定数倍されます．これは $2\pi/3$ 回転でだけ確かめておけばよいでしょう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} u = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2 u$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} v = x_2 + \omega^2 x_3 + \omega x_1 = \omega v$$

次に対称軸に関する折り返しでは u, v が入れ代わって，しかも定数倍が出ます．何でやっても同じなので頂点3を固定して1,2を入れ替えるような変換で試してみましょう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} u = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3 = \omega v$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} v = x_2 + \omega^2 x_1 + \omega x_3 = \omega^2 u$$

確かにそうなっていますね．そこでこれを3乗しておきますと u^3, v^3 は回転では不変で，折り返しでは互いに入れ替わることが確認できます．したがって次の二つの式は3変数の対称式になっています．

$$u^3 + v^3, \quad u^3 v^3$$

そこでこの二つの対称式を係数 A, B を使って表わしてみましょう．

$u^3 + v^3$ は簡単です．対称式で3次式になるのは $e_3, e_2 e_1, e_1^3$ の三つだけですが，$e_1 = 0$ としているのですから $u^3 + v^3 = \alpha e_3$ と表わされるはずです．そこで，たとえば $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 1)$ を代入してみると，

$$u = v = -2 + \omega + \omega^2 = -2 + (-1) = -3$$

であって，また $e_3=-2$ ですから，

$$u^3+v^3=(-3)^3+(-3)^3=\alpha(-2)=\alpha e_3$$

です．これから $\alpha=-27$，$u^3+v^3=-27e_3=27B$ がわかりました．

次に u^3v^3 ですが，これは 6 次式なので判別式の場合と同じく $e_1=0$ を考慮すると

$$u^3v^3=\beta e_2^3+\gamma e_3^2$$

しかあり得ません．そこでまず $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,-1)$ を代入してみます．

$$u=0+\omega-\omega^2=\sqrt{3}i,\quad v=0+\omega^2-\omega=-\sqrt{3}i$$

かつ $e_2=-1,e_3=0$ ですから，

$$u^3v^3=(\sqrt{3}i)^3(-\sqrt{3}i)^3=\beta(-1)^3+\gamma\cdot 0=\beta e_2^3+\gamma e_3^2$$

です．これより $\beta=-27$ です．次に $(x_1,x_2,x_3)=(-2,1,1)$ を代入してみると，上とまったく同様にして

$$u=v=-3,\quad e_3=-2,\ e_2=-3$$

なので

$$u^3v^3=(-3)^3(-3)^3=\beta(-3)^3+\gamma(-2)^2$$

です．これより $\gamma=0$ がわかって，$u^3v^3=-27e_2^3=-27A^3$ です．

つまり u^3,v^3 は 2 次方程式

$$t^2-(u^3+v^3)t+u^3v^3=t^2-27Bt-27A^3=0$$

の二つの解です．したがって

$$u^3,v^3=\frac{27B\pm\sqrt{(27B)^2+4\cdot 27A^3}}{2}=\frac{27B\pm 3\sqrt{3}\sqrt{-D}}{2}$$

です．もちろん D は判別式を表わします．

さてあとは u^3, v^3 の3乗根をとれば u, v は求まります．しかし3乗根はそれぞれ三つずつあるので，これではあまりにもたくさんの組合わせが出てきてしまいます! そこで判別式に従って，場合分けして考えてみます．

（1）　$D \geqq 0$ のとき．この時3次方程式は3実根を持つのでした．したがって u が決まれば $v = \overline{u}$ (複素共役) として一意的に決まります．したがって u だけ決めればよろしい．その決め方は3通りありますが，どれでも本質的には同じです．(後で説明します．)

（2）　$D < 0$ のとき．この時は3次方程式は1実根 x_1 と二つの共役複素根 x_2, x_3 を持ちます．したがって u, v はどちらも実数です．一方 u^3, v^3 も実数になっていますから，実数の範囲で3乗根をとればよろしい．

さて u, v が決まったら，それから x_1, x_2, x_3 を決めねばなりません．それには次の連立一次方程式を解けばよいのです．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = u \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = v \end{cases}$$

$\omega = (\omega^2)^2$ に注意すればこれはラグランジュの補間公式の方法で解くことができます（例2.5参照）．

$$\begin{cases} x_1 = (u+v)/3, \\ x_2 = -(u+v)/6 - \dfrac{i}{2\sqrt{3}}(u-v) = (\omega u + \overline{\omega} v)/3, \\ x_3 = -(u+v)/6 + \dfrac{i}{2\sqrt{3}}(u-v) = (\omega^2 u + \overline{\omega^2} v)/3 \end{cases}$$

(2)のときは u, v の選び方は一通りしかありませんでしたからそれで問題はないとして，(1)の場合には u のとり方そのものが3通りありました．しかしその3通りの選び方は一つを固定してそれを u_0 とおくと，あとは $\omega u_0, \omega^2 u_0$ と表わされますから，上の表示のしかたを見ればその取り替えは根 $x_1, x_2 . x_3$ の間の置換を引き起こすにすぎないことがわかります．

これで係数が実数の場合の3次方程式の解の公式が得られました．じつはこの公式はラグランジュ以前，すでに16世紀にタルターリャ，カルダノと

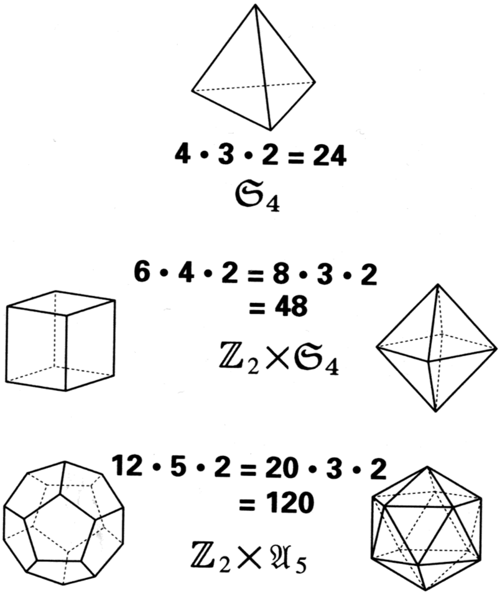


図 4.4　正多面体と多面体群

いう二人の数学者によって得られています．ただ上でやったように方程式が 3 実根を持つ場合には必然的に u, v は実数ではなく，ゼロでない虚部を持つような複素数になっています．このような状況が複素数の誕生を促したのではないかという説もあります．

3 次方程式，4 次方程式の解法の発見については [8] が面白い読み物です．またラグランジュによる 4 次方程式の解法についてはたとえば [9] で紹介されています．

第 II 部

主題

対称式についてはすでに第 I 部で二変数，および三変数のものを扱いました．いずれも方程式論への応用が主なものでしたが，この第 II 部では方程式を離れて，対称式が奏でる独自の美しい旋律を体験してみましょう．ここでキーとなるのは**対称群**と**調和多項式**(ちょうわたこうしき)です．

対称群は変数の入れ替えによって多項式環に変換群として自然に作用しています．このようなとき，対称群の引き起こす変換に関して不変なものを求めることは，作用そのものを理解するうえで基本的です．このように群がある対象に変換群として働いているときに，不変なものを研究する分野を**不変式論**(ふへんしきろん)とよびます．

この場合は対称式がちょうど**不変式**(ふへんしき)にあたっています．

しかし不変式論は永遠に変わらない，不滅なもののみを記述するので，これだけでは対称群が引き起こす変換を完全に理解することはできません．むしろ変換そのものは対称式 (= 不変なもの) ではなく，その対極に位置するものへと凝縮されていると考えられます．そのように作用が凝集して結晶化したものが調和多項式の空間です．

対称式と調和多項式の両方を知ることで，対称群の引き起こす多項式環上の変換を意のままに操ることができるようになるわけです．

第 5 章…………………

調和多項式

本章では一般の n 変数の対称式についてまずまとめます．この部分は全章までに扱った 3 変数の対称式が単に n 変数になっただけで本質的に新しい部分はありません．

本章のテーマは調和多項式です．調和多項式はいわば対称式の影にあたる部分で，そこには対称式はほとんど現われません（定数多項式だけが調和かつ対称な多項式です）．しかし調和多項式はむしろ対称群の作用をより凝縮した形で体現しているといえるのです．その証拠の一つとして，調和多項式に対する平均値の定理を証明します．

§1　基本対称式

すでに 3 変数の対称式はかなり詳しく扱いましたが，この節では n 変数の対称式と調和多項式を扱います．その準備として 3 変数の場合と少し重複しますが，基本対称式，ニュートンの公式などを n 変数の場合に拡張して述べておきましょう．

定義 5.1　n 変数の多項式環を今までと同じように $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ で表わします．このとき多項式

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$$

が**対称式**であるというのは，変数の任意の置換を行なっても元の多項式と同じである時にいいます．記号で書くと

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$$
$$((i_1, i_2, \cdots, i_n) \text{ は } (1, 2, \cdots, n) \text{ の任意の順列})$$

ということです．

対称式の例としてもっとも適当なのはやはり**基本対称式**と**べき乗和多項式**でしょう．もうすでにおなじみの多項式たちですが，確認のために n 変数でその形を書いておきましょう．

簡単なのはべき乗和の方で

$$\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\
&\vdots \\
p_k &= x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

となります．これが対称式なのは火を見るよりも明らかです．

次に基本対称式ですが，具体的には次のような多項式たちが基本対称式になります．

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
e_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
e_n &= x_1x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

べき乗和多項式と違ってこちらの方は n 個しかありませんし，$\cdots$ で省略されている部分を補う作業は格段に難しくなっていると思います．3 変数の場合にもやったように

基本対称式は方程式における解と係数の関係から生まれたもの

でした．したがって，このように具体的に書き下すよりも，解と係数の関係で定義するのが近道でしかも本質的です．

数学ではしばしばこのような局面に直面します．素朴に発想すると，具体的に書き下せるならその方が簡単だと考えがちです．しかし，具体的に書き下すことによってかえって対象が複雑になり，かつ物事の本質を見失うこともあるものです．

ここでは新たに不定元 t を導入して，基本対称式 $\{e_k \mid 0 \leqq k \leqq n\}$ を次の式で定義することにします．

$$\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)=\sum_{k=0}^{n}e_{n-k}t^k \tag{5.1}$$

つまり左辺を展開して，それを t の多項式としてまとめなおすと，t^k の係数が e_{n-k} であるというわけ．解と係数の関係とは符号が少し違いますが，本質的には同じことです．

このように定義しておくと，基本対称式が本当に対称式になっているかどうかを確認するのは容易です．実際(5.1)式の左辺は明らかに $\{x_i\}$ についての対称式ですから，右辺の t の各係数も対称式です．

この定義式の威力をもう一つ見ておきましょう．

命題 5.2 1階の偏微分作用素 D を

$$D=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}$$

で定義します．このとき

$$De_k=(n-k+1)e_{k-1}$$

が成り立ちます．（ただし $e_{-1}=0$ と便宜的に取り決めておきましょう．）

［証明］ 定義式(5.1)の両辺を D で微分しましょう．D は変数 t とは無関係なので，右辺の偏微分は簡単です．

$$D\left(\sum_{k=0}^{n}e_{n-k}t^k\right)=\sum_{k=0}^{n}(De_{n-k})\,t^k \tag{5.2}$$

左辺はどうなるかというと

$$D\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)=\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ i\neq j}}(t+x_i)=\frac{\partial}{\partial t}\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)$$

です! $\{x_i \mid 1\leqq i\leqq n\}$ に関する微分だったものがいつの間にか t に関する微分にすり代わってしまったことに注意してください．したがってこれは右辺を t で偏微分したもの

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{n}e_{n-k}t^k\right)=\sum_{k=1}^{n}e_{n-k}kt^{k-1} \tag{5.3}$$

と等しい．そこで (5.2) 式と (5.3) 式の t^k の係数を比較して，

$$De_{n-k}=(k+1)e_{n-k-1}$$

が得られます．あとは $n-k$ を改めて k とおきなおせばよろしい． ■

基本対称式とべき乗和多項式の関係は**ニュートンの公式**で与えられます．3 変数の場合には説明しましたので，ここでは結果を述べるだけにしておきます．

定理 5.3 n 変数の基本対称式 $\{e_k \mid 0\leqq k\leqq n\}$ とべき乗和多項式 $\{p_k \mid 0\leqq k\}$ の間に次の漸化式が成り立ちます．

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j p_{k-j}e_j &= p_k-e_1p_{k-1}+\cdots+(-1)^k e_k p_0\\ &=(-1)^k(n-k)e_k \quad (1\leqq k\leqq n)\\ \sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_{k-j}e_j &= p_k-e_1p_{k-1}+\cdots+(-1)^n e_n p_{k-n}\\ &=0 \quad (n\leqq k)\end{aligned}$$

このニュートンの公式を使って**ウィルソンの公式**[1]とよばれている整数に関する性質を示してみましょう．

[1] John Wilson (1741 – 1793)

命題 5.4 p を素数とするとき $1\cdot 2\cdots(p-2)\cdot(p-1)+1$ は p で割り切れます．同じことですが，数式で表わすと

$$\prod_{k=1}^{p-1} k = 1\cdot 2\cdots(p-2)\cdot(p-1) \equiv -1 \pmod p$$

が成り立ちます．

［証明］ $n=p-1$ 変数で考えて $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,2,\cdots,p-1)$ を代入しましょう．すると p_k, e_k などに代入を行なった後は単なる整数になりますから，それを P_k, E_k と書くことにします．（そこで以下小文字の p は素数を，大文字の P はべき乗和を表わします．）

証明すべき式の左辺はちょうど E_{p-1} であることに注意してください．一般に基本対称式よりべき乗和多項式のほうが初等整数論的な性質は見やすいことが多いので，まずべき乗和多項式の性質を調べ，それをニュートンの公式で基本対称式の性質に翻訳する，という戦略をとりましょう．

補題 5.5

（1） $P_0+1, P_{p-1}+1$ は p で割り切れます．

（2） $1\leqq k\leqq p-2$ なら $P_k\equiv 0 \pmod p$，つまり P_k は p で割り切れます．

［証明］ （1）は簡単です．P_{p-1} については，フェルマーの小定理[2]としてよく知られている $x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ を用いればよいでしょう．ただし $1\leqq x\leqq p-1$ とします．

（2）を簡単に説明しておきましょう．$1\leqq k\leqq p-2$ なら，$a^k\not\equiv 1 \pmod p$ となるような自然数 a が存在します（このことは少し考察を必要としますが，それは諸君に任せることにしましょう）．また $\{1,2,\cdots,p-1\}$ と $\{ai \mid 1\leqq i\leqq p-1\}$ は mod p で集合として一致します．したがって

[2]Pierre de Fermat（1601 – 1665）：政治家としてのかたわら，数学，特に整数論を研究しました．彼が証明を発見したと宣言したフェルマーの大定理は，その証明が発表されないまま数学者の頭を悩ましつづけ，つい最近ワイルス（Andrew Wiles ; 1953 –）によって証明されたのは記憶に新しいところです．

$$P_k = \sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv \sum_{i=1}^{p-1}(ai)^k = a^k \sum_{i=1}^{p-1} i^k = a^k P_k \pmod{p}$$

で，$(1-a^k)P_k \equiv 0 \pmod{p}$ がわかります．これから $P_k \equiv 0 \pmod{p}$ です． ■

あとの証明は簡単です．ニュートンの公式より

$$\begin{aligned} P_{p-1} &= \sum_{k=1}^{p-2}(-1)^{k-1}P_{p-1-k}E_k + (-1)^{p-2}P_0E_{p-1} \\ &\equiv (-1)^{p-1}E_{p-1} = E_{p-1} \end{aligned}$$

ですが，$P_{p-1} \equiv -1$ なので，$E_{p-1} \equiv -1$ です．同様にして $E_k \equiv 0$ $(1 \leqq k \leqq p-2)$ もわかります． ■

じつはウィルソンの公式は mod p で考えたときの方程式 $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ の解と係数の関係と解釈することができ（フェルマーの小定理），そのように考えると証明はほとんど自明です．

§2 対称群と不変式環

対称式は変数のどのような並べ替えでも変わらない式として定義されました．これを対称群の言葉で書きなおしておきましょう．

3 変数のときには 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ が登場しました．その時には $\mathfrak{S}_3$ を正三角形を保つような平面上の合同変換の全体として視覚的に表わしました．もちろん n 変数でもそのような記述は可能なのですが，もはや直感が効きにくい高次元の話になりますし，ここではむしろ数の置換としての側面を強調したいと思います．

数の置換であれば，順列という捉え方も可能です．しかし順列は単なる数の並びなので，演算のような代数構造が入っていません．最初のうちは代数構造のない方がシンプルで理解しやすいと思うのですが，慣れてくるにしたがって，だんだんと代数構造が入っていないことに不便を感じるようになり

ます．順列を数の並びではなく，数の入れ替え（置換）であると考えると，そのような入れ替えを続けて行なうとか，あるいは入れ替えたものを元に戻すというような操作（つまり演算）が考えられます．そのようにして生まれたのが n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ です．

n **次対称群** $\mathfrak{S}_n$ の元は**置換**とよばれ，次のような記号で表わされます．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

この記号はすでに 3 次の対称群の話でおなじみですね．もちろん $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ は $1, 2, \cdots, n$ の順列です．上段の数字はここでは順番に並んでいますが，別にその必要はまったくなく，要するに上段と下段の数字の対応だけが重要です．たとえば $n = 4$ なら

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

です．

さて（5.4）式で表わされた σ は数 k を i_k に移すような置換です．これを写像の記号を用いて $\sigma(k) = i_k$ とも書きます．さらにこのような記号を流用して，$\sigma(x_k) = x_{\sigma(k)} = x_{i_k}$ とか $\sigma(x) = \sigma((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ と書くことにしましょう[3]．

置換は各不定元を入れ替えるという操作を引き起こしますが，このようなとき少しカッコよく，「置換（あるいは対称群）は不定元の空間に**作用**（さよう）**する**」といいます．各不定元への置換の作用は，自然に不定元の和とか積の変換を引き起こし，結局対称群の多項式環への作用を誘導します．このとき置換 σ によって変換された多項式を $\sigma f(x)$ などと書くことにしましょう．つまり $f(x), g(x)$ を多項式とするとき，

---

[3] このように書くと誤解を招きやすいのですが，この $\sigma(x)$ は変数の場所の入れ替えではなく，あくまでも変数そのものを入れ替えているのだということを注意しておきたいと思います．つまりここでは多項式を関数と考えるのではなく，不定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の記号としての積，あるいはその一次結合の全体と捉えています．まぁ，しかし，こんな煩瑣なことは気にしないでもよろしい．（笑）

$$\sigma\,(f(x)g(x)) = (\sigma f(x))\,(\sigma g(x)) \quad [\text{積}]$$
$$\sigma\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\,\sigma f(x) + \beta\,\sigma g(x) \;\; (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \quad [\text{一次結合}]$$

が成り立つように σ の作用を多項式環全体に拡張します．

この対称群の多項式環への作用を用いて，対称式の定義を言い換えると，次のようになります．

定義 5.6 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変であるような多項式を**対称式**とよびます．つまり $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ が対称式であるとは

$$f(x) = \sigma f(x) = f(\sigma(x)) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

が成り立つことです．群の作用についての不変性を強調したいときには，$f(x)$ を $\mathfrak{S}_n$-不変式，あるいは単に**不変式**とよびます．

この定義を最初の定義 5.1 とよく比べてみてください．まったく同じことを言っているのですが，なんという違いでしょうか．諸君の中には，このように書くとかえってわかりにくくなってるだけじゃないか，と思っている人もたくさんいると思います．しかし

よく知っていることを新しい概念を用いて書き直す

という作業はしばしばとても有益なのです．新しい言葉，新しい概念，新しい記号は我々の最新鋭の武器です．もっとも武器によっては危なっかしくて使えなかったり，あるいはかえって足をひっぱたりすることもありますが…

以下対称式の全体を $S = S(x_1, \cdots, x_n)$ と書くことにしましょう．対称群の作用の決め方から，明らかに S は積と一次結合について閉じています．つまり S は多項式環の中の**部分代数**（ぶぶんだいすう）になっています．この代数構造を強調するときには S のことを（対称群の作用に関する）**不変式環**（ふへんしきかん）とよびます．

対称式についての**第一基本定理**とよばれる次の定理はとても重要です．

定理 5.7 対称式は基本対称式 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ の多項式としてただ一通りに表わされます．つまり S は n 変数の多項式環と同型です．

証明は 3 変数や 2 変数の場合とまったく同じく，次の写像

$$\mathbb{C}[y_1, y_2, \cdots, y_n] \ni F(y_1, y_2, \cdots, y_n) \longrightarrow F(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in S$$

が全単射であることを示せば OK です．あとは諸君にお任せしましょう．

§3 調和多項式の定義

多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を単項式の和に書きましょう．

$$f(x) = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} a_j\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

ここに $j = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ はべき指数を表わし，$a_j \in \mathbb{C}$ は単項式の係数です．このとき $f(x)$ に対して定数を係数とする偏微分作用素 $\partial(f(x)) = f(\partial_1, \cdots, \partial_n)$ を

$$\begin{aligned}\partial(f(x)) &= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} a_j \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \cdots \partial x_n^{j_n}} \\ &\qquad (|j| = j_1 + j_2 + \cdots + j_n) \\ &= \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} a_j\, \partial_1^{j_1} \partial_2^{j_2} \cdots \partial_n^{j_n}\end{aligned}$$

で決めましょう．ただし $\partial_i = \partial/\partial x_i$ と書きました．たとえば基本対称式なら

$$\begin{aligned}\partial(e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \\ \partial(e_2) &= \sum_{i<j} \partial_i \partial_j \\ &\ \vdots \\ \partial(e_n) &= \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n\end{aligned}$$

ですし，あるいはべき乗和多項式なら

$$\partial(p_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^k$$

となります．

定義 5.8 多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ が**調和**(ちょうわ)であるとは，$f(x)$ が次の微分方程式をみたすときにいいます．

$$\partial(e_k)f(x) = 0 \quad (1 \leqq \forall k \leqq n)$$

ただし $\{e_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ は基本対称式を表わします．

例 5.9

(1) 定数は明らかに調和多項式です．ちょっとつまらない例ですね．

(2) $x_i - x_j$ $(i \neq j)$ は調和多項式です．実際 $\partial(e_1)(x_i - x_j) = 1 - 1 = 0$ ですが，$\partial(e_k)$ は k 次の微分なので，一次式 $x_i - x_j$ に対しては $\partial(e_k)(x_i - x_j) = 0$ $(k \geqq 2)$ が成立します．

演習 5.10 $\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ の一次式 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ が調和であるための条件は $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ であることを示してください．

ニュートンの公式を使うと調和多項式の定義はべき乗和多項式を使っても同じだということがわかります．つまり $f(x)$ が調和多項式であることは

$$\partial(p_k)f(x) = 0 \quad (1 \leqq k)$$

が成り立つことと同値です．さらに基本対称式が不変式環 S を生成していることから

$$g(\partial_1, \cdots, \partial_n)f(x) = 0 \quad (g(x) \in S,\ g(0) = 0)$$

であることとも同値です．最後の条件 $g(0) = 0$ は $g(x)$ の定数項がゼロ であることを意味しています．

調和多項式の全体を $\mathcal{H}$ で表わすことにしましょう．すぐにわかることは

補題 5.11 $\mathcal{H}$ はベクトル空間で，偏微分することによって不変です．また $\mathcal{H}$ の k 次斉次式全体を $\mathcal{H}_k$ と表わすと $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}_k$ の和としてただ一通りに表わされます．つまり

$$\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k \quad (\text{直和})$$

この補題では難しそうな言葉がたくさん出てますね．でも安心してください．実際の意味するところはとても単純です．その意味については証明の中でゆっくり解説してゆくことにしましょう．

［証明］ **ベクトル空間**であるというのは，単に一次結合で閉じている，あるいはもっと簡単にいうと和と定数倍（スカラー倍）が自由にできる，ということをいっているにすぎません．これは偏微分作用素の線型性を使って次のように示すことができます．$f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{H}$ としましょう．すると $1 \leqq k \leqq n$ に対して

$$\partial(e_k)\,(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha\,\partial(e_k) f_1(x) + \beta\,\partial(e_k) f_2(x) = 0 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

です．これは $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \in \mathcal{H}$ を意味しています．つまり $\mathcal{H}$ はベクトル空間．これで調和多項式の和とかスカラー倍を自由に計算してもよい（＝また調和多項式になる）という保証が得られました．

次に偏微分によって**不変**であるという部分．これは $f(x) \in \mathcal{H}$ を調和多項式とすると，$f(x)$ の偏微分もまた調和多項式であるということを意味しています．偏微分作用素は多項式環から多項式環への線型写像です．その部分空間である調和多項式の全体が，また調和多項式に移されるということですね．このようなとき，調和多項式の空間は偏微分することによって不変であるといいます．

実際の証明はとても簡単です．まず 1 階の偏微分についてだけ確かめておけば十分です．2 階以上の偏微分については繰り返し 1 階の偏微分を行なえ

ばよろしい．ところで偏微分はどのような順番に行なっても結果が等しい，つまり

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

なのでした．そこで $f(x) \in \mathcal{H}$ とすると

$$\partial(e_k)\big(\partial_i f(x)\big) = \partial_i \partial(e_k) f(x) = 0$$

となって，$\partial_i f(x)$ もまた調和であることがわかります．$\mathcal{H}$ はベクトル空間ですから，任意の 1 階の偏微分が $\mathcal{H}$ を保つことが結論できます．

最後に調和多項式の空間が k 次斉次の空間の和になることを示しましょう．証明すべき式には，**直和**（ちょくわ）という難しそうな単語がカッコ付で和の後ろに書いてあります．これは「ただ一通りに和として書ける」ことを意味しているにすぎません．つまり

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h'_k(x) \quad (h_k(x), h'_k(x) \in \mathcal{H}_k)$$

ならば $h_k(x) = h'_k(x)$ が成り立つということです．またついでにいえば，上の和は無限和のように見えますが，実際は $f(x)$ が多項式なのでゼロでない $h_k(x)$ は有限個です．裏を返せばほとんどすべての $h_k(x)$ はゼロだということです．この $h_k(x)$ のことを $f(x) \in \mathcal{H}$ の k **次斉次成分**（せいじせいぶん）とよびます．

多項式が k 次斉次の多項式の和にただ一通りに書けることはほぼ明らかですので，証明の要点は，$f(x) \in \mathcal{H}$ に対して

$$f(x) = \sum_k h_k(x) \quad (\deg h_k(x) = k)$$

と (ただ一通りに) 書いたときに，$h_k(x) \in \mathcal{H}$ だろうか?　という一点につきます．両辺を $\partial(e_i)$ で偏微分すると，

$$0 = \partial(e_i) f(x) = \sum_k \partial(e_i) h_k(x)$$

ですが，$\partial(e_i) h_k(x)$ は斉次 $k-i$ 次式ですから，この式は 0 という多項式の斉次式への分解とみなすことができます．ところがその分解は一意的なので

すから，$\partial(e_i)h_k(x)=0$ でなければなりません．つまり $h_k(x)$ は調和です．

■

さて，一つでも調和多項式が見つかるとこの補題によりそれを偏微分したり，偏微分したものの一次結合をとったりしたものはすべて調和です．そこでなるべく次数の大きい調和多項式を一つ作っておくことにしましょう．

定理 5.12 次の式で定義される**差積** Δ は調和多項式です．

$$\Delta=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)$$

［証明］ まず，次の式に注意しておきましょう．置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma\Bigl(\partial(g(x))f(x)\Bigr)=\partial(\sigma g(x))\sigma f(x)$$

これは偏微分の意味とか，置換の作用とかを頭に思い描けばほぼ明らかな等式です．特に $g(x)$ が対称式なら

$$\sigma\Bigl(\partial(g(x))f(x)\Bigr)=\partial(g(x))\sigma f(x) \tag{5.5}$$

となります．

x_i と x_j の二つだけを交換するという置換を**互換**（ごかん）とよび，記号で (i,j) と表わします．差積に互換を施すと，ちょうど (-1) 倍されます．

$$(i,j)\Delta=-\Delta$$

したがって，e_k は対称式なので（5.5）式を適用すると

$$(i,j)\Bigl(\partial(e_k)\Delta\Bigr)=\partial(e_k)(i,j)\Delta=-\partial(e_k)\Delta$$

です．

さて x_i と x_j を入れ替えて -1 倍されるような多項式はかならず (x_i-x_j) で割り切れます．実際

$$f(\cdots x_i\cdots x_j\cdots)=-f(\cdots x_j\cdots x_i\cdots)$$

なので，x_i に x_j を代入すると

$$f(\cdots x_j \cdots x_j \cdots) = -f(\cdots x_j \cdots x_j \cdots), \qquad \therefore \quad f(\cdots x_j \cdots x_j \cdots) = 0$$

したがって因数定理より $f(x)$ は $x_i - x_j$ で割り切れます．

差積に話を戻すと，この場合 $\partial(e_k)\Delta$ は任意の 2 文字の入れ替えで符号が出るわけですから，それは差積自身で割り切れなくてはいけません! ところが偏微分することにより次数は下がっていますから，それが可能なのはゼロだけです．したがって

$$\partial(e_k)\Delta = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

となり，これは差積が調和多項式であることを意味しています． ■

これで，差積とそれを偏微分したような多項式はすべて調和多項式であることが判明しました．

§4　調和多項式の平均値定理

この節では，調和多項式のもつ面白い性質を一つ紹介しましょう．そのために少し準備をします．まず

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]e_i = \left\{ \sum_i f_i(x)e_i \mid f_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \right\} \tag{5.6}$$

とおきましょう．$\mathcal{J}$ は明らかにベクトル空間，つまり和とスカラー倍をとることによって閉じています．それに加えて，その定義の仕方から $\mathcal{J}$ の任意の元と勝手な多項式の積もまた $\mathcal{J}$ に属しています．この二つの性質をもつような集合を多項式環の**イデアル**とよびます．つまり $\mathcal{J}$ はイデアルです．

この場合 $\mathcal{J}$ は最初から具体的な形で書き表わされています．しかしもう少し抽象的な与え方もできます．基本対称式 $\{e_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ を含むようなイデアルはすべて $\mathcal{J}$ を含みますから，$\mathcal{J}$ は基本対称式を含むような最小の

イデアルです．このようなとき，$\mathcal{J}$ は基本対称式によって**生成されたイデアル**であるといい，

$$\mathcal{J} = \langle e_i \mid 1 \leqq i \leqq n \rangle$$

と表わします．この定義を上の (5.6) と比べてみてください．

定理 5.13　イデアル $\mathcal{J}$ に属する多項式で調和になっているものはゼロだけです．つまり

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{J} = \{0\}$$

定理の証明の前に次の補題を準備しておきましょう．

補題 5.14　$f(x)$ を複素数係数の多項式として，各係数の複素共役をとることによってえられた多項式を $f^*(x)$ と書くことにしましょう．このとき $f(x)$ が $\underline{k\ 次の斉次式}$ であれば，$\partial(f^*(x))f(x)$ は非負の実数，つまり

$$\partial(f^*(x))f(x) \geqq 0$$

であって，かつ等号が成立するのは $f(x)=0$ の場合に限ります．

［証明］ 多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{j=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} a_j\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

のように書いておきましょう．すると，その複素共役 $f^*(x)$ は次のようになります．

$$f^*(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} \overline{a_j}\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

したがって，補題の式は

$$\partial(f^*(x))f(x) = \left(\sum_j \overline{a_j}\, \partial_1^{j_1} \partial_2^{j_2} \cdots \partial_n^{j_n}\right) \sum_l a_l\, x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$$

$$= \sum_{j,l} \overline{a_j} a_l \, \partial^j x^l$$

となります．最後の式では $x^j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots$ などのように省略形で書きました．

ところで $\partial(f^*)$ は k 階の偏微分作用素なので，多項式の次数を k だけ下げます．一方 $f(x)$ は k 次の多項式ですから，この二つの積は明らかに定数（$= 0$ 次式）です．そこで最後の式のうち $\partial^j x^l$ が定数にならないものはすべてゼロになるはずです．これが定数になるのはちょうど $j = l$ の場合に限られ，その時の定数は

$$j! = j_1! \cdot j_2! \cdots j_n!$$

です．

以上の考察から

$$\partial(f^*(x))f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n_{\geqq 0}} \overline{a_j} a_j j! = \sum_j |a_j|^2 j! \geqq 0$$

となることがわかりました．これがゼロになるのは，明らかに $a_j = 0 \ (\forall j)$ のときで，それは $f(x) = 0$ を意味します． ■

［定理 5. 13 の証明］

$h(x) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{J}$ としましょう．このとき $h_k(x)$ を k 次斉次成分とするとまた $h_k(x) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{J}$ ですから，最初から $h(x)$ は k 次斉次であるとしても一般性を失いません．

さて，一方では $h(x) \in \mathcal{J}$ ですから

$$h(x) = \sum_i s_i(x) e_i \quad (s_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n])$$

と表わされます．したがって

$$\partial(h^*(x))h(x) = \sum_i \partial(s_i^*(x))\partial(e_i)h(x) = 0$$

です．最後の $= 0$ は $h(x)$ が調和であることの直接の帰結です．ところが上の補題 5. 14 によれば等号成立は $h(x) = 0$ の場合だけで，これが証明す

べきことでした. ■

系 5.15 対称式が調和多項式であればそれは定数に限ります. つまり

$$\mathcal{H} \cap S = \mathbb{C} \cdot 1$$

［証明］ 対称式は基本対称式によって生成される多項式環でした. 特に

$$S = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \sum_i S e_i$$

が成り立ちます. ここで $\oplus$ は**直和を表わす記号**で,「ただ一通りに和の形に表わすことができる」ということを意味します. この場合は非常に簡単で, 任意の対称式は <u>定数</u> と <u>定数を含まない対称式</u> の和に(ただ一通りに)表わせることを述べているにすぎません.

ところが調和多項式は $\mathcal{J}$ との共通部分はゼロのみで, しかも S の定数でない部分はすべて $\mathcal{J}$ に含まれることが上の直和分解式からわかります. したがって共通部分は定数しかありません. ■

とても長い準備になりましたが, いよいよ調和多項式のユニークな性質を紹介することにしましょう. でも証明の大部分は, じつは, もうすでに気づかないうちに済んでしまっています. すべて重要な出会いは気がつかないうちになされている. 実際のところ人生なんてそんなものです.

定理 5.16（**調和多項式の平均値の定理**） 多項式 $f(x)$ が調和であることと次の等式が任意の $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ および $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について成立することは同値です.

$$f(a) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(a + \sigma(x)) \tag{5.7}$$

［証明］ まず $f(x)$ が調和多項式なら(5.7)式が成立することを見ましょう. a も x も変数と思ってよいのですが, とりあえず a を定数(定ベクトル?)と思い, x を変数と解釈します. すると, (5.7)式の右辺は x について調和, かつ対称式です.

対称式であることはすべての置換にわたって和(あるいは平均)をとっていますから明らかでしょう．調和であることは，次の二つの事実からわかります．

- 調和という性質は置換で動かしても変わらないこと．
- 調和という性質は平行移動しても変わらないこと．

どちらの性質も簡単ですから，諸君で確かめてみてください．

さて，調和かつ対称なものは定数しかあり得ないというのが系 5.15 の主張でした．したがって(5.7)式の右辺は x について定数です．その値は $x=0$ を代入してみれば $f(a)$ すなわち左辺であることがわかります．

次に(5.7)式が成り立てば $f(x)$ が調和であることを示しましょう．この場合には a も x も同時に(独立な)変数とみなすことにしましょう．まず次の式に注意します．

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f(a+\sigma(x)) = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i)}} f(a+\sigma(x))$$

この式は意味の上から明らかです．これを k 回繰り返せば

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)^k f(a+\sigma(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i)}}\right)^k f(a+\sigma(x))$$

ですが，さらに $i=1,2,3,\cdots$ について和をとることにより，べき乗和多項式 p_k に対して

$$\partial(p_k(a)) f(a+\sigma(x)) = \partial(p_k(x)) f(a+\sigma(x))$$

です．左辺では偏微分は a についてとられていますが，右辺では x についての偏微分にすり変わっているところに注意してください．したがって

$$\begin{aligned}
\partial(p_k(a)) f(a) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \partial(p_k(a)) f(a+\sigma(x)) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \partial(p_k(x)) f(a+\sigma(x)) \\
&= \partial(p_k(x)) \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(a+\sigma(x)) \\
&= \partial(p_k(x)) f(a) = 0
\end{aligned}$$

です．つまり $f(a)$ は調和多項式です． ■

(5.7) 式は，要するに，点 a の回りをぐるっと均等に和をとればそれは中央の値に一致することを意味しています．これが平均値の定理の名前の起こりです．

§5 球面調和関数

調和関数というのは微分方程式やポテンシャルとの関係からラプラス[4]によって導入されました．それは次のような関数 $F(x)$ のことです（もちろん多項式とは限りません）．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(x) = 0 \tag{5.8}$$

ガウスはこのような関数に対して平均値の定理が成り立つことを示しましたが，それは $F(x)$ の球面上の積分が中心での値に一致するといったものでした．通常は調和関数というとラプラスの意味での調和関数，平均値の定理というとガウスの平均値の定理を意味します．

本書の調和多項式の定義はラプラスの定義よりはるかに強く，平均値の定理もガウスのものより強力です．しかしその根本にあるものは共通しています．

というのもラプラスの場合には，群としてユークリッド運動群の中の原点を動かさない部分群 $G = O(3)$ を考えます．これを 3 次の**直交群**（ちょっこうぐん）とよびます．このような群の作用によって不変な量は距離の関数です．特に多項式で考えると，距離の二乗

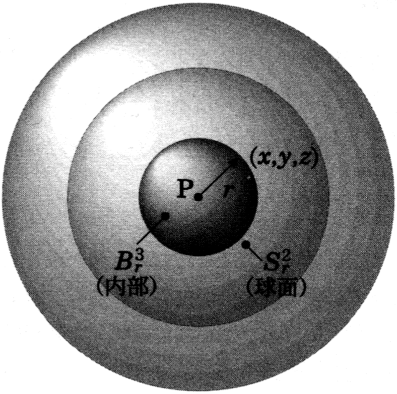
$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{5.9}$$

が基本的な不変量となります．(5.8) 式の左辺に現われる微分作用素

[4]Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)：解析力学を使って天体力学を研究し，さらに近代確率論の始祖とされます．調和関数は天体力学の研究中，重力ポテンシャルの考察から生まれました．

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

はラプラシアンとよばれますが，これは(5.9)式の x_i を $\partial/\partial x_i$ に置き換えたものであることがわかるでしょう．さらに，群 $O(3)$ の作用による空間内の軌道は球面になります．だから球面上の積分が中心の値に一致するという形の平均値の定理が成立するのです．



平均値の定理

$$U(\mathrm{P}) = \int_{B_r^n} U(x)dx = \int_{S_r^{n-1}} U(x)d\omega(x)$$

図 5.1 球面と距離

以上を表にしてまとめてみましょう．

	本書		ラプラス	
群	対称群	$\mathfrak{S}_n$	直交群	$O(3)$
基本不変式	基本対称式	$\{e_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$	$(\text{距離})^2$	$\sum_{i=1}^{3} x_i^2$
軌道	多角形の頂点	$\{\sigma(x) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$	球面	$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = R^2$

これほど違うことが，どこか似ているということに気がつく，それがさらに数学を面白くします．

直交群に関するラプラスの調和関数について興味を持った人は，たとえば[6]を読んでみるとよいでしょう．

第 6 章……………………

母関数

多項式の一つ一つはもちろん次数が有限で確定していますが，多項式の全体を考えるといくらでも大きな次数の多項式が現われます．畢竟いつも有限な次数だけを扱っていては不便だということです．そこで本章では形式的に無限個の項を許すような“多項式”を考えましょう．これを形式的べき級数とよびます．

形式的べき級数を考えることのメリットの一つは，多項式環全体の情報を一つの級数に含み持たせたりすることができるようになることがあげられます．このように一つの形式的べき級数にたくさんの情報が詰め込まれているようなものを母関数とか生成関数とよんでいます．… といっても実例を見てみないことには理解できないですよね．まずは形式的べき級数の話から始めることにしましょう．

§1　形式的べき級数

多項式では項の数は有限ですが，これでは不便なこともあります．たとえば等比級数の和の公式を見てみると

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \tag{6.1}$$

ですが，右辺の式はすでに多項式ではありません．ところがこのような式でも演算は多項式とほぼ同様に行なうことができます．たとえば上の式を確認

してみましょう[1].

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots) = 1+(x-x)+(x^2-x^2)+\cdots = 1 \quad (6.2)$$

この例では少しわかりにくいかもしれませんが，無限に続く式であっても，2 次の部分，3 次の部分，…，k 次の部分と計算していく時に，それぞれの次数の項はすべて有限回の計算をすれば確定します．たとえば次の例を見てみましょう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} x^i x^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} x^{i+j}\end{aligned}$$

ここで k 次の項を計算するには，$i+j=k$ となるような i,j の組に渡る和をとることになります．そのような $i,j \geqq 0$ の組み合わせは $(i,j) = (0,k),(1,k-1),\cdots,(k,0)$ の $k+1$ 個しかありません．したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k \\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \qquad (6.3)\end{aligned}$$

です．移項してまとめると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

となりますね．（演習 1.2 参照）

このように，多項式でなくても，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{C}) \qquad (6.4)$$

[1] この (6.2) 式では実数，複素数などの数の極限を考えているのではなく，あくまでも記号として，級数の同次数の項の係数のみを比較していることに注意してください．

の形の級数ならまったく形式的に和をとったりスカラー倍をしたり，あるいは上でやったように積を計算したりできます．無限級数を考えるときには，収束性を第一に考えがちですが，このような和，スカラー倍，積などを計算するのに級数の収束性はまったく必要がありません!

そこでたとえ収束していなくても (6. 4) の形の級数を考えて，それを**形式的べき級数**(けいしきてきべききゅうすう)とよびます．また形式的べき級数の全体には，和，スカラー倍，積の演算が考えられるので代数になります．そこで形式的べき級数の全体を $\mathbb{C}[[x]]$ と書いて，**形式的べき級数環**とよびます．

少し前に戻りますが，(6. 3) 式は次のように，等比級数の和の公式 (6. 1) の両辺を微分してもわかります．

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$

左辺はもちろん $1/(1-x)^2$ となりますね．右辺の表示は添字が少しずれていますが，(6. 3) 式と同じものです．このように形式的べき級数の各項を微分することを**項別微分**(こうべつびぶん)とよびます．

収束もしていないのに微分してよいのか?　ですって?　なるほど，これはとてもよい質問です．実際のところ，上で項別微分したとき，一方は形式的べき級数ではなく分数関数 $1/(1-x)$ ですから，この問はもっともです．答としては「意味のある場合には項別微分は常に許される」ということになります[2]が，本書ではあまりこの部分は気にしないで，むしろ項別微分が許されたとしたらどのような計算ができるだろうかという視点で話をすすめたいと思います．気になる人は少し専門的になりますが，[5]，[10] などをご覧ください．

この章のタイトルの**母関数**(ぼかんすう)というのもまた形式的べき級数です．（もちろん収束しているような場合も多いのですが．）一般に，母関数というのは，適当な関数列とか数列が与えられたとき，そのような列を係数に持つ級数を指します．つまり，列 $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ が与えられたとき，形式的べき級数

[2] 何もいっていないですね，数学的には．

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

のことを $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ の母関数とよぶわけです．上では形式的べき級数の係数は複素数であるとしましたが，実際のところ和，スカラー倍，積が計算できればよいので，そのような演算をもつものであれば何でもかまいません．だから母関数においても A_k は別に複素数でも関数でも，あるいは行列など，何でもかまいません．

例 6.1 上で見たように数列 $a_k = k$ $(k \geqq 0)$ に対応する母関数は $x/(1-x)^2$ です．同様にして数列 $a_k = k^2$ に対応する母関数は

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \tag{6.5}$$

となります．この式が収束して意味をもつのは $|x| < 1$ という範囲ですが，形式的べき級数の式としてはいつも意味をもちます．つまりこの式は形式的べき級数の等式

$$(1-x)^3 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x) \tag{6.6}$$

を意味しているわけです．もちろん右辺は多項式ですが，x^3 以上の項の係数はゼロと思って形式的べき級数と解釈します．

もし(6.5)式を(6.6)式のように解釈することなく，x の各値について収束した級数値（あるいは関数値）の等式とみなすと，左辺はもはや $|x| \geqq 1$ では意味を持ちません．このようにあくまでも「代数計算を形式的にやってよい世界」が形式的べき級数環の世界で，たとえば解析学との橋渡しをするときには上に述べたような注意が必要になります．しかし，形式的べき級数環の中で考えるときにはすべての形式的な計算が許され，ここから豊かな例や重要な結果が産み出されます．まさに数学の母胎となるような道具といえるでしょう．

例 6.2 もう少し複雑な例もみておきます．それは $a_k = \sin k\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の母関数です．計算してみますと，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sin k\theta\right)x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{2i}\,x^k \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}e^{ik\theta}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ik\theta}x^k\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{1-e^{i\theta}x}-\frac{1}{1-e^{-i\theta}x}\right\} \\
&= \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}
\end{aligned}
$$

となります．この場合，係数 a_k が θ の関数ですから，母関数は θ, x の 2 変数関数となっていることに注意してください．

この式が収束して等しくなるのはやはり $|x|<1$ の範囲においてですが，形式べき級数としてはそのような制限はありません．

ここにあげた例は，母関数というよりも単に関数のべき級数展開[3]とよんだほうがよいぐらいのものです．もう少し本質的な母関数の例をこの後の節で研究することにしましょう．

§2　ポアンカレ級数

2 変数の多項式の全体 $\mathbb{C}[x,y]$ を考えてみましょう．この場合，次数 k の斉次多項式は

$$
\{x^iy^j \mid i+j=k\}=\{x^k, x^{k-1}y, x^{k-2}y^2, \cdots, xy^{k-1}, y^k\}
$$

の一次結合の形にただ一通りに書き表わされます．このようなとき単項式 $\{x^iy^j \mid i+j=k\}$ は k 次斉次式の空間の**基底**になるといいます．また基底の個数，この場合には $k+1$ ですが，これを斉次式の空間の**次元**といいます．基底というのは空間の中の座標を決定するような要素たち，次元というのはそうして決まった座標の個数（あるいは自由に変わり得る係数の個数）というのが直感的なイメージです．

[3]あるいはテイラー展開ともよばれます．これについては微積分の教科書をご覧ください．また知らない方はこの後では出てきませんので気にすることはありません．

さて，k 次斉次式の空間に対して，その次元 $k+1$ を対応させ，さらにそのような数を係数に持つ，変数 t の形式的べき級数を次のように定義します．

$$P(\mathbb{C}[x,y];t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^k$$

このべき級数を見ると，各斉次多項式の空間が何次元であるか，つまり基底（= 基本的な多項式）の数がどれぐらいあるのか，が一目瞭然でわかるしかけです．この形式的べき級数 $P(\mathbb{C}[x,y];t)$ を 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の**ポアンカレ級数**[4]とよびます．

2 変数なら比較的簡単ですが，3 変数となると少し考えなくてはなりませんね．3 変数多項式環のポアンカレ級数が一体どのようになるのかちょっと計算してみましょう．まず次のような級数を考えてみます．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}&=\sum_{p=0}^{\infty}x^p\sum_{q=0}^{\infty}y^q\sum_{r=0}^{\infty}z^r\\&=\sum_{p,q,r=0}^{\infty}x^py^qz^r\end{aligned}\tag{6.7}$$

すると右辺の級数の各項は 3 変数の単項式をすべてちょうど一回ずつ含んでいます．そこで同じ次数の単項式の数を数えるには $x=y=z=t$ とおいて t の係数を見ればよいわけです!

これを実行してみましょう．k 次斉次式の空間を $H_k=H_k(x,y,z)$ と表わしておくと，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim H_k\,t^k=\frac{1}{(1-t)^3}\tag{6.8}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{(1-t)^2}\tag{6.9}$$

です．ところで最後の $1/(1-t)^2$ の展開式はすでにやりましたから，

[4]Jules Henri Poincaré（1854 – 1912）

$$
\begin{aligned}
(6.9)\text{式} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}(k+1)t^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}(k+1)kt^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}\frac{(k+2)(k+1)}{2}t^k \\
&= \sum_{k=0}\binom{k+2}{2}t^k
\end{aligned}
$$

となりますね．なんとこんなところにも二項係数が出てきました!

まとめておきましょう．

命題 6.3　3 変数多項式環のポアンカレ級数は

$$
P(\mathbb{C}[x,y,z];t) = \sum_{k=0}\binom{k+2}{2}t^k
$$

で与えられます．

ポアンカレ級数は難しいものではなく，単に同じ次数の単項式の数を数えたにすぎないのですから, このような微分の方法を使わないでも，組み合わせ論的に考えてその係数を決めることは容易です．一度試してください．

演習 6.4　n 変数多項式環のポアンカレ級数が次のようになることを確かめてください．

$$
P(\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n];t) = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}t^k \tag{6.10}
$$

次に少し変わった例を計算してみます．それは対称式のなす代数のポアンカレ級数です．まずは 2 変数の対称式環 $S(x,y)$ について見てみます．この場合 $S(x,y)$ は基本対称式 $e_1 = x+y, e_2 = xy$ の多項式です．しかし 2 変数の多項式環と異なっているのは $e_2 = xy$ が 2 次式である点です．これを前のように考えると

$$\frac{1}{(1-e_1)(1-e_2)}$$

において，e_1 は 1 次なので t に，e_2 は 2 次なので t^2 に 置き換える必要があります．つまり

$$P(S(x,y);t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} \tag{6.11}$$

をべき級数に展開したものがポアンカレ級数となります．

実際に計算してみますと，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} &= \frac{1+t}{(1-t^2)(1-t^2)} \\ &= (1+t)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k+1}\end{aligned}$$

となります．つまり偶数項 t^{2k} も奇数項 t^{2k+1} も同じ係数 $k+1$ を持つということになります．

では 3 変数の対称式全体ではどうなるでしょうか？　級数展開しない前は 2 変数の場合と大差ありません．3 次の基本対称式 e_3 が新たに増えるだけなので

$$P(S(x,y,z);t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

となります．しかしこれを級数展開するのはそうやさしくありません．展開式の最初の数項を書いてみますと，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} \\ &\quad = 1+t+2t^2+3t^3+4t^4+5t^5+7t^6+8t^7 \\ &\qquad +10t^8+12t^9+14t^{10}+16t^{11}+19t^{12}+\cdots\end{aligned}$$

となりますが，一見したところあまり規則性はありそうにありません．このような係数を記述するには組み合わせ論的な考察から生まれた**分割関数**(ぶんかつかんすう)とい

う関数が必要になります．分割関数に興味がある人はたとえば［21］を読んでみるとよいでしょう．

3変数の対称式の場合に著しいことは，対称式のポアンカレ級数が3変数の多項式全体のポアンカレ級数を割りきるということです．

$$\frac{P(\mathbb{C}[x,y,z];t)}{P(S(x,y,z);t)}=(1+t)(1+t+t^2)=1+2t+2t^2+t^3$$

商空間は次数 $0,1,2,3$ のものだけからなり，次元はそれぞれ $1,2,2,1$，全部合せるとなんと3次対称群の元の個数 $3!=6$ となっています!

§3　母関数

前節では1変数のポアンカレ級数を考えましたが，同じような考え方でポアンカレ級数の多変数版を考えてみることにしましょう．そのような多変数化されたポアンカレ級数も母関数，あるいは**生成関数**（せいせいかんすう）とよびます．たった一つの多項式から，各斉次部分の次元がわかったり，あるいはもっと詳細な情報が産み出されるので母なるものとか，生成するものといったイメージがあるのです．

まず2変数多項式環の母関数を考えます．この母関数はとても簡単なので，ポアンカレ級数の多変数版が一体何をさすのかがわかりやすいと思います．2変数多項式環の k 次斉次式の基底は次のようにとれるのでした．

$$\{x^iy^j \mid i+j=k\}$$

そこでこの k 次斉次部分を表わす母関数（の一部）を

$$\sum_{i+j=k}x^iy^j=\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}$$

と書くことにしましょう．じつはこのような母関数の定義の仕方は大変危うく，別の基底をとってくると別の母関数が現われてしまいます．この部分を整理して<u>本質的な</u>母関数を定義するには $GL_2(\mathbb{C})$ の多項式環への作用を利用するのが一番賢明です．しかしこの議論は少々難しいので後回しにしましょう．

さて k 次斉次の母関数が決まったので後はそれを加えればよろしい．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}&=\frac{1}{x-y}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}y^{k+1}\right)\\&=\frac{1}{x-y}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)\\&=\frac{1}{(1-x)(1-y)}\end{aligned}$$

したがって 2 変数多項式環の母関数表示は

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}$$

と書けます．この左辺の表示は，3 変数の場合ではありますが，すでに前節の(6.7)式などでも出てきています．したがってここで新しいのは右辺の表示式です．

2 変数の多項式環を扱うだけだとあまりに簡単すぎて，上の式のありがたみが今ひとつわからないと思います．そこで冗長にはなりますが，3 変数の場合をさらに考えてみます．ただしこの場合には 3×3 の行列式の知識が必要になりますので，まだ行列式を知らない読者諸君はこの部分を飛ばして読んでも差し支えないでしょう．行列式について知りたい方は，たとえば，[11]，[15] などを参照してください．

定理 6.5 3 変数多項式環の母関数は次の式で与えられます．

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^{(k)}(x,y,z)}{\Delta(x,y,z)}$$

ただし

$$\Delta(x,y,z)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$$

は差積で，さらに $\Delta^{(k)}(x,y,z)$ は差積によく似た行列式

$$\Delta^{(k)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^{2+k} & y^{2+k} & z^{2+k} \end{vmatrix}$$

で定義されます.

［証明］ 右辺の分母を払った形の式を計算します.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{(k)}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} & \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+2} & \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \dfrac{x^2}{1-x} & \dfrac{y^2}{1-y} & \dfrac{z^2}{1-z} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ x(1-x) & y(1-y) & z(1-z) \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

さて最後の行列式を，第 1 行は $(1-x, 1-y, 1-z) = (1,1,1) - (x,y,z)$，第 2 行は $(x-x^2, y-y^2, z-z^2) = (x,y,z) - (x^2,y^2,z^2)$ と分解して，展開します．しかし，同じ行が現われる行列式はゼロであることを用いると，展開式中のゼロでない行列式はただ一つしかないことが容易にわかるでしょう．しかもその行列式が $\Delta(x,y,z)$ になります! つまり

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ x-x^2 & y-y^2 & z-z^2 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \frac{\Delta(x,y,z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

です．あとは両辺を差積 $\Delta(x,y,z)$ で割れば証明すべき式になります． ■

§4　次数写像とポアンカレ級数

多項式環 $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を考えて，そのうち偶関数の全体を $\mathcal{P}^{even}$，奇関数の全体を $\mathcal{P}^{odd}$ と書くことにしましょう．つまり $f(x) \in \mathcal{P}^{even}$ はすべての項が偶数次の多項式で，$g(x) \in \mathcal{P}^{odd}$ はすべての項が奇数次の多項式です．明らかに任意の多項式は偶数次の多項式と奇数次の多項式の和にただ一通りに書き表わすことができますから，$\mathcal{P}$ は次のように直和分解されています．

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{even} \oplus \mathcal{P}^{odd} \quad (\text{直和}) \tag{6. 12}$$

このとき $\mathcal{P}^{even}, \mathcal{P}^{odd}$ にも通常の次数を考えることができますから，次数に関するポアンカレ級数が定義されます．

$$P(\mathcal{P}^{even}; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}_k^{even}\ t^k$$

ところが実際のところ和には偶数次の項しか現われないので，

$$P(\mathcal{P}^{even}; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}_{2k}^{even}\ t^{2k}$$

となることがわかります．同様にして

$$P(\mathcal{P}^{odd}; t) = \sum_{l=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}_l^{odd}\ t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}_{2l+1}^{odd}\ t^{2l+1}$$

直和を表わす式(6. 12)より，この二つのポアンカレ級数の和は多項式環 $\mathcal{P}$ のポアンカレ級数に一致します．(次数の定義された)ベクトル空間としての直和が，ポアンカレ級数を考えることによって通常の和に変わるわけです．

$$P(\mathcal{P}; t) = P(\mathcal{P}^{even}; t) + P(\mathcal{P}^{odd}; t) \tag{6. 13}$$

左辺のポアンカレ級数は(6. 10)式で与えられています．これを利用して，右辺の二つの級数を求めてみましょう．まず $P(\mathcal{P}^{even}; t)$ には t の偶数次の項

しか現われませんから，$P(\mathcal{P}^{even};t)=P(\mathcal{P}^{even};-t)$ であることに注意しましょう．同様に $-P(\mathcal{P}^{odd};t)=P(\mathcal{P}^{odd};-t)$ です．

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{P};-t) &= P(\mathcal{P}^{even};-t)+P(\mathcal{P}^{odd};-t)\\
&= P(\mathcal{P}^{even};t)-P(\mathcal{P}^{odd};t)
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

したがって，(6. 13)式と(6. 14)式を辺々加えることにより，

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{P}^{even};t) &= \frac{1}{2}\left(P(\mathcal{P};t)+P(\mathcal{P};-t)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-t)^n}+\frac{1}{(1+t)^n}\right\}\\
&= \frac{(1+t)^n+(1-t)^n}{2(1-t^2)^n}\\
&= \frac{1}{(1-t^2)^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}t^{2k}
\end{aligned}
$$

と計算できます．

同様にして辺々引き算することにより $P(\mathcal{P}^{odd};t)$ を求めることもできますが，(6. 13)式を利用すれば $P(\mathcal{P};t),P(\mathcal{P}^{even};t)$ はわかっているので，

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{P}^{odd};t) &= P(\mathcal{P};t)-P(\mathcal{P}^{even};t)\\
&= \frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{2(1-t^2)^n}\\
&= \frac{1}{(1-t^2)^n}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2k+1}t^{2k+1}
\end{aligned}
$$

と計算することができます．このように直和の関係にある(次数が定義されている)ベクトル空間たちのポアンカレ級数では，

三つのうちの二つがわかっていると残りの一つもわかる

という便利な性質があります．このようなことは何もポアンカレ級数に限ったことではなく，いろいろ応用が効く考え方です．

次の例を見てみましょう．もうすでに求めたものですが，二変数の対称式のポアンカレ級数を違った方法で計算してみます．以前のように二変数の対称式の空間を $S(x,y)$ と書きましょう．この空間には多項式の次数からくる次数付けが自然に入っています．この空間から 1 変数の多項式への写像 φ を

$$S(x,y) \ni f(x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x,x) \in \mathbb{C}[x] \tag{6.15}$$

で決めます．つまり φ は y に x を代入するという写像です．このような**代入写像**（だいにゅうしゃぞう）の例はすでに第 1 章の定理 1.18 でも考えました．代入写像は数学においてとても重要な写像のうちの一つです．

さて，この代入写像 φ は多項式の次数を変えません．もちろん二変数多項式の次数は x の次数と y の次数を合わせたもので，一変数多項式の次数は通常の次数です．このようなとき，φ は**次数写像**（じすうしゃぞう）であるといわれます．

一般に次数付きの二つのベクトル空間 U, V が与えられたとしましょう．V が**次数付きベクトル空間**であるというのは，V が各斉次次数を持った部分空間の直和になっていることです．

$$V = \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} V_k \quad (V_k = (k \text{ 次斉次ベクトルの全体}))$$

本書では主に多項式環の部分空間で，次数付けも通常の多項式の次数付けからくるものを考えています．このとき V のポアンカレ級数は

$$P(V;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim V_k \, t^k$$

で与えられるのでした．U についても同じですね．

さて，この二つの次数付きのベクトル空間の間に線型な次数写像が与えられたとします．

$$\varphi : V \longrightarrow U$$

φ が次数写像というのは次数を保つということでしたから，$\varphi(V_k) \subset U_k$ が成り立っています．もし φ が全単射なら，φ は次数付きベクトル空間の間の

同型写像(どうけいしゃぞう)とよばれ，このとき $\varphi : V_k \xrightarrow{\sim} U_k$ も同型写像で $\dim V_k = \dim U_k$ が成り立ちますから，二つの空間のポアンカレ級数は等しくなります．

$$\varphi \text{ が同型写像} \Rightarrow P(V;t) = P(U;t)$$

しかし一般に φ が同型写像になることはまれにしか起こりません．もっともいつも同じだったら面白みはないので，むしろ（苦労するかもしれないけれど）違っていることの方が魅力的だとはいえます[5]．

（6.15）で考えていた次数写像 φ に話を戻しましょう．このとき φ は同型ではありません．実際 $\varphi(x^2 - 2xy + y^2) = \varphi(0) = 0$ となり，二つの異なるものが同一の元ゼロに写っていますから，単射（= 一対一写像）ではない．しかし φ が全射（= 全体に写る = 上への写像）であることは容易に証明できます．φ は線型写像なので，このような時には φ の核(かく)とよばれる空間を決定すればよろしい．

$$\ker \varphi = \{f(x,y) \in S(x,y) \mid \varphi(f(x,y)) = 0\}$$

つまり核 $\ker \varphi$ というのは φ で写すとゼロになるような空間のことです．線型写像において単射性が崩れているときにはこの空間が悪さをしているのです．

実際に核を決定してみましょう．$\varphi(f(x,y)) = f(x,x) = 0$ で，y に x を代入するとゼロになるのですから，因数定理より $f(x,y)$ は $(x-y)$ で割り切れます．

$$f(x,y) = (x-y)q(x,y)$$

ところが $f(x,y)$ は対称式なので，$q(x,y)$ は交代式になります．だから $q(x,y)$ も $(x-y)$ で割り切れなくてはならない!

[5]私の知人で，知らない土地に行くときには必ず地図を見て研究，一番わかりやすい路を偵察し，以後その場所に行くときには一寸違わず同じ路を行って戻ってくるという人がいます．彼女は数学者ではありませんが，どちらかというとふらっと知らない路に地図も持たないで入ってしまう人のほうが（苦労は多いと思うけど）面白い人生をおくるような気がします．もっとも私が数学者だからそう思うのかもしれません．

$$f(x,y) = (x-y)^2 g(x,y)$$

このとき $g(x,y)$ は対称式であることに注意しましょう．逆に上の形をしたものは対称式で，しかも φ で写すとゼロになることは明らかです．つまり

$$\ker\,\varphi = (x-y)^2 S(x,y) \subset S(x,y)$$

となることがわかりました．このことを数学では

$$0 \longrightarrow (x-y)^2 S(x,y) \overset{\text{包含写像}}{\longrightarrow} S(x,y) \overset{\varphi}{\longrightarrow} \mathbb{C}[x] \longrightarrow 0 : \text{完全系列} \tag{6.16}$$

と書きます．この「**完全系列**（かんぜんけいれつ）」という部分がミソですが，要するにこれは φ が全射で，さらに $\ker\,\varphi$ が $(x-y)^2 S(x,y)$ であるということをいっているにすぎません．この部分を詳しく知りたい人は［1］を参照してください．

次数付きベクトル空間の完全系列

$$0 \to U \overset{\psi}{\to} V \overset{\varphi}{\to} W \to 0 : \text{完全系列}$$

が与えられていて，ψ, φ が次数写像なら

$$P(V;t) = P(U;t) + P(W;t)$$

が成り立ちます．直和のときの式（6. 13）とよく似ていますね．じつはこの式はベクトル空間の直和の関係に帰着して証明するのですが，今は立ち入らないことにして，この式を上の完全列（6. 16）に使ってみましょう．すると

$$P(S(x,y);t) = P((x-y)^2 S(x,y);t) + P(\mathbb{C}[x];t) \tag{6.17}$$

です．ここで $P((x-y)^2 S(x,y);t)$ は単に $P(S(x,y);t)$ の次数を高いほうに 2 だけずらしたものにすぎませんから，$P((x-y)^2 S(x,y);t) = t^2 P(S(x,y);t)$ であることがわかります．この式を（6. 17）に代入して

$$P(S(x,y);t) = t^2 P(S(x,y);t) + P(\mathbb{C}[x];t),$$
$$\therefore \quad (1-t^2)P(S(x,y);t) = P(\mathbb{C}[x];t) = \frac{1}{1-t},$$
$$P(S(x,y);t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$$

これで二変数の対称式のポアンカレ級数が求まりました（110 ページ（6. 11）式参照）.

諸君の中には「もうすでに簡単に求まってるのだから，そんな難しく考えなくても … 」という感想を持った人がいると思います．私もそれはもっともだと思います．物事は簡単で単純なのが一番です．しかし，このような考え方をしているとじつはとても便利なのです．実際上のような方法でポアンカレ級数を求めると，対称式が基本対称式の多項式で書き表わされることなどは知らなくても計算できますし，他にも応用が効く．その例は次の章で与えることとしましょう.

演習 6. 6　3 変数の多項式環 $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ を考えます．多項式 $f(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P}$ に対して，その対称化（たいしょうか）を

$$\varphi(f(x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \sigma f(x_1,x_2,x_3)$$
$$= \frac{1}{3!}\sum_{(i_1,i_2,i_3)} f(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) \in S(x_1,x_2,x_3)$$

で決めます．ただし (i_1, i_2, i_3) は $(1,2,3)$ の任意の順列を動きます.

（1）　対称化写像 $\varphi : \mathcal{P} \to S(x_1, x_2, x_3)$ は次数写像であって，しかも全射であることを示してください.

（2）　対称化写像の核 $\ker\varphi$ のポアンカレ級数を求めてください.

$$0 \to \ker\varphi \to \mathcal{P} \to S(x_1,x_2,x_3) \to 0 : \text{完全}$$

（3）　4 次斉次の多項式で対称化写像でゼロになるようなものはどれくらいあるでしょうか?　その次元を求めてください.

演習 6. 7　本節冒頭の記号を使って，$\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n], \mathcal{P}^{even}, \mathcal{P}^{odd}$ を考えましょう．次数写像 $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{even}$ を

$$\varphi(f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \frac{1}{2}\bigl(f(x) + f(-x)\bigr)$$

で決めます．このとき，φ は全射で，$\ker \varphi = \mathcal{P}^{odd}$ であることを示してください．つまり次の完全列が成り立ちます．

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}^{odd} \xrightarrow{\psi} \mathcal{P} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}^{even} \longrightarrow 0 \ \text{：完全列}$$

ただし ψ は $\mathcal{P}^{odd}$ をそのまま $\mathcal{P}$ に埋め込む包含写像です．

第 7 章

調和多項式と対称式

この章では

- 任意の多項式が調和多項式と対称式の積（の一次結合）として書き表わせること
- その書き表わし方が本質的にはただ一通りしかないこと

の 2 点を明らかにすることを目標とします．その過程で調和多項式の空間がじつは有限次元であって，差積の偏微分全体になっていることも示しましょう．すでに対称式は基本対称式の多項式であることが分かっているので，このことは多項式の全体がよく分かっているもの二つの積で書けることを意味します．

えっ？　多項式の全体なんてよく分かっているんだから，そんな複雑なことしなくっても … ですか？　それは大きな間違いです．というのもここで明らかになる構造は，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用と非常に相性がいいもので，もう少し詳しく解析すれば，この分解によって，

> **対称群が多項式環上にどのように働いているのかが**
> **手にとるように分かるようになる**

からです．残念ながら本書ではとてもそのような境地に到達することはできないのですが，その入り口までご案内しようというのが目的です．筆者にとっても入口までしかご案内できないことが本当に残念です．面白いんだけ

どなぁ.

§1　調和多項式の正体

差積とその偏微分は調和多項式の例でした．このようなものはもちろん本質的に有限個（有限次元）しかありません．この節の目標は，調和多項式の全体 $\mathcal{H}$ がじつは差積とその偏微分の全体のなす空間と一致することと，さらに

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J} \tag{7.1}$$

と多項式の全体が二つの空間の直和に分解することを示すことにあります．

$\mathcal{J}$ は第 5 章 §4 で登場しましたが，基本対称式 $\{e_i\}$ によって生成されるイデアルなのでした．ニュートンの公式を考慮にいれると，これはべき乗和多項式 $\{p_k\}$ から生成されたイデアルといってもかまいません．

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] e_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] p_k$$

また明らかに $\mathcal{J}$ は 定数項のない 対称式をすべて含んでいることにも注意しておきましょう．

以下の証明では，調和多項式の構造と直和の等式（7.1）が同時に示されることになります．ここではまず，直和の等式（7.1）について考えます．定理 5.13 によって $\mathcal{H} \cap \mathcal{J} = \{0\}$ であったことに注意しましょう．つまり $\mathcal{H} + \mathcal{J}$ は直和です．したがって（7.1）を示す時の問題点はこの二つの空間の和が多項式の全体になるかどうかの一点にあります．

こんな時に数学者がよくやる手は

商空間を考えてみる

というやつです．この場合には $\mathcal{J}$ がイデアルなので，$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]/\mathcal{J}$ を考えるのがよいでしょう．なぜ商空間を考えるのかというと，もし $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ が二つの空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{J}$ の直和だったら，商空間は調和多項式の空間と同型になるからです．

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]/\mathcal{J}$$

逆もまたしかりで，この場合 $\mathcal{H}\cap\mathcal{J}=\{0\}$ ですから**商空間の情報が分かれば直和であることが結論できます**．これについてはまたあとで詳しく述べます．今は「そっか，それで商空間を考えるのか」程度の理解で十分です．

さて，**商空間** $\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]/\mathcal{J}$ では二つの多項式 $f(x),g(x)$ はその差が $\mathcal{J}$ に属するときに同じものとみなされます．これを記号で $f(x)\equiv g(x) \pmod{\mathcal{J}}$ と書き，$f(x)$ と $g(x)$ は（$\mathcal{J}$ を法として）**合同**（ごうどう）**である**といいます．つまり

$$f(x)\equiv g(x) \pmod{\mathcal{J}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x)-g(x)\in\mathcal{J}$$

ですね．時には mod $\mathcal{J}$ の部分は省略されます．また商空間においては $f(x)$ と $g(x)$ は同じものなのですから，はなはだしい場合には $f(x)=g(x)$ と通常の等号で書かれることもあります[1]．

とくに商空間においては $\mathcal{J}$ の元はすべてゼロとみなされます．また $\mathcal{J}$ がイデアルなので，商空間には積と和，およびスカラー倍が矛盾なく定義されて，それ自身がまた代数になっていることに注意しましょう．

補題 7.1　商空間 $\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]/\mathcal{J}$ においては $x_i^n\equiv 0 \pmod{\mathcal{J}}$ です．

［証明］　補題の主張は商空間の中で x_i^n がゼロになっているということですから，要するにそれは $x_i^n\in\mathcal{J}$ であることをいっているにすぎません．

[1] この二つの等号 $f(x)\equiv g(x)$，$f(x)=g(x)$ は，もとの多項式という空間を尊重するか（$\equiv$），商空間を尊重するか（$=$）によって変化する，初心者には若干わかりづらい記号です．このように数学の記号が文脈に依存してその意味を変えてしまうということは，「数学者とは杓子定規で頭が固い」という世間の定説（?）からは想像のつかないことかもしれません．しかしながら，このような記号の流用のもたらす混沌に数学者自身もしばしば頭を悩ませていることも事実です．

基本対称式の定義式(5.1)において $t=-x_i$ とおくと，左辺はゼロになりますから，

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{n} e_{n-k}(-x_i)^k \\
&= (-1)^n x_i^n + \sum_{k=1}^{n}(-x_i)^{n-k} e_k, \\
\therefore \quad x_i^n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} x_i^{n-k} e_k \in \mathcal{J}
\end{aligned}
$$

これが証明したかったことでした. ■

この補題によって，商空間は有限次元であることがただちに分かります. というのも x_i は n 乗するとゼロなので，多項式中 x_i^n を含んだ項はすべてゼロになるからです．つまり商空間においてゼロでないような多項式は単項式

$$
x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \quad (0 \leqq k_i \leqq n-1)
$$

の一次結合だけ考えておけば十分なのです．このような単項式は n^n 個しかありません.

しかし我々の目的にはこの評価は，まだ十分ではなく，商空間はもっと小さな次元をもっていることを示す必要があります．そのために記号を準備しましょう．本章だけの記号ですが，文字 X の多項式で N 次式以下のもの全体を $\mathcal{P}^N[X]$ と表わすことにします．つまり，

$$
\mathcal{P}^N[X] = \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{C} \right\}
$$

このように書くと x_n の $(n-1)$ 次(以下の)多項式全体は $\mathcal{P}^{n-1}[x_n]$ と表わすことができます.

商空間 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/\mathcal{J}$ は差が $\mathcal{J}$ に属するような二つの多項式を同じものとみなすことで構成されています．そこで，商空間の中では「同じ」であるような多項式の集合(これを**合同類**(ごうどうるい)とよびます)の中から一つずつ多項式を選び，それを各合同類の代表として扱うことにします．このような元を代

表元とよんでいます．代表元がしっかり分かれば商空間の構造はだいたい分かったことになります．

補題 7.2 商空間の代表元を

$$\mathcal{P}^0[x_1] \cdot \mathcal{P}^1[x_2] \cdots \mathcal{P}^{n-2}[x_{n-1}] \cdot \mathcal{P}^{n-1}[x_n]$$

に属する多項式の中からとることができます．

（注）

（1） 代数 A の部分空間 $I, J \subset A$ に対して，その積 $I \cdot J$ は単に I の元と J の元の積全体ではなく，そのような積から生成されたベクトル空間を意味します．つまり

$$I \cdot J = \left\{ \sum_k a_k b_k \mid a_k \in I, b_k \in J \right\}$$

です．もちろん和は有限和です．

（2） 補題では，代表元が $\mathcal{P}^0[x_1]\mathcal{P}^1[x_2] \cdots \mathcal{P}^{n-1}[x_n]$ の 中から とれるということしか主張されていませんが，じつはこれが代表元の全体であることがあとで分かります．

［証明］ この証明中では

$$\mathcal{K} = \mathcal{P}^0[x_1] \cdot \mathcal{P}^1[x_2] \cdots \mathcal{P}^{n-2}[x_{n-1}] \cdot \mathcal{P}^{n-1}[x_n]$$

と書くことにしましょう．補題の意味するところは，任意の多項式が $\mathcal{K}$ に属する多項式のいずれかと合同であるということです．

変数の数 n に関する帰納法で証明するので，$\mathcal{J}_n, \mathcal{K}_n$ などと記号に添字として変数の数 n をつけて各ステップ毎の対象を表わすことにします．

$n = 1$ の時には補題は明らかです．この場合には $e_1 = x_1$ で，$\mathcal{J}_1 = \mathbb{C}[x_1]x_1$ ですから，すべての多項式はその定数項が同じなら合同ということになります．したがって定数（多項式）の中から代表元が選べるというわけです．

そこで，補題が $(n-1)$ まで正しいとしましょう．このとき $(n-1)$ 変数の多項式は $\mathcal{K}_{n-1}$ を係数とするべき乗和多項式 $\{\widetilde{p}_k = x_1^k + \cdots + x_{n-1}^k \mid 1 \leqq$

$k \leqq n-1\}$ の多項式として表わすことができます．変数の数を区別するため，$(n-1)$ 変数のべき乗和多項式を $\widetilde{p}_k$ と表わしました．

実際 $\mathcal{K}_{n-1}$ から代表元がとれることより，

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}] = \mathcal{K}_{n-1} + \mathcal{J}_{n-1} = \mathcal{K}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}]\widetilde{p}_k$$

ですが，この式を $\sum_k \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}]\widetilde{p}_k$ の $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ の部分にもう一度代入してやります．すると

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}] &= \mathcal{K}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}]\widetilde{p}_k \\ &= \mathcal{K}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}_{n-1}\widetilde{p}_k + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{k'=1}^{n-1} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{n-1}]\widetilde{p}_k\widetilde{p}_k \end{aligned}$$

となるでしょう．あとはこの過程を繰り返し適用すれば OK です．いつまでたっても最後の和の中に多項式全体の部分が残りそうに思いますが，現実の多項式は有限個しか項がないので，このプロセスは有限回行なえば十分です．

次に n 変数の多項式 $f(x)$ を考えましょう．これを x_n についての多項式として書き表わします．

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} f_j(x_1, \cdots, x_{n-1})\, x_n^j$$

ここで係数多項式 f_j は $(n-1)$ 変数の多項式です．上で注意したことから f_j は $\mathcal{K}_{n-1}$ を係数とする $\{\widetilde{p}_k \mid 1 \leqq k \leqq n-1\}$ の多項式として表わすことができます．したがって全体としては

$$f(x) = \sum_{m=(m_1, m_2, \cdots, m_n)} a_m\, \widetilde{p}_1^{m_1} \widetilde{p}_2^{m_2} \cdots \widetilde{p}_{n-1}^{m_{n-1}} x_n^{m_n} \quad (a_m \in \mathcal{K}_{n-1}) \tag{7.2}$$

と書けていることになります．

さて，$\mathcal{J}_n$ を法として考えると，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{p}_k &= x_1^k + \cdots + x_{n-1}^k \\
&= (x_1^k + \cdots + x_{n-1}^k + x_n^k) - x_n^k \equiv -x_n^k \pmod{\mathcal{J}_n}
\end{aligned}
$$

であることに注意しましょう．実際 $p_k = x_1^k + \cdots + x_n^k \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_n}$ ですから最後の合同式が成り立つわけです．これを (7.2) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &\equiv \sum_{m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)} a_m (-x_n)^{m_1} (-x_n^2)^{m_2} \cdots (-x_n^{n-1})^{m_{n-1}} x_n^{m_n} \\
&\equiv \sum_j b_j x_n^j \pmod{\mathcal{J}_n}
\end{aligned}
$$

となることがわかります．最後の b_j は係数 a_m の一次結合を整理しただけのものなので，$b_j \in \mathcal{K}_{n-1}$ です．また，すでに注意したように $x_n^n \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_n}$ ですので，最後の和は $0 \leqq j \leqq n-1$ にわたる和しか現われません．つまり最後の式は $\mathcal{K}_n$ に属しています．これが示したいことでした． ■

さて，ベクトル空間 $\mathcal{P}^0[x_1]\mathcal{P}^1[x_2]\cdots\mathcal{P}^{n-1}[x_n]$ の次元は $1\cdot 2\cdot\cdots n = n!$ なので，商空間 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\mathcal{J}$ の次元は $n!$ 以下，特に

$$
\dim \mathcal{H} \leqq n! \tag{7.3}
$$

であることが分かります．

定理 7.3

（1） 調和多項式の次元は $n!$ です．

$$
\dim \mathcal{H} = n!
$$

（2） 調和多項式 $\mathcal{H}$ は差積を偏微分して得られた空間と一致します．

$$
\mathcal{H} = \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n]\Delta
$$

［証明］ 差積を偏微分したもの全体を $\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}$ と書きましょう．式 (7.3) より $\dim \mathcal{H} \leqq n!$ が分かっていますから，$\dim \mathcal{H}_\Delta \geqq n!$ を証明すれば，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Delta$ かつ両者の次元は $n!$ となって定理の証明が完了します．

そこで $\dim \mathcal{H}_\Delta \geqq n!$ を変数の数 n に関する帰納法で示しましょう．もちろん $n=1$ の時には明らかに成立しています．（この時には差積は 1 と解釈されます．）そこで $(n-1)$ まで OK として n の時に示しましょう．

差積を変数 x_n の多項式として考えると，それは x_n の $(n-1)$ 次式です．そこで x_n について展開すると，最高次 x_n^{n-1} の係数は $(-1)^{n-1}\Delta(x_1,\cdots,x_{n-1})$ であることがわかります．ここに $\Delta(x_1,\cdots,x_{n-1})$ は $(n-1)$ 変数の差積です．

$$\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{n-1}\Delta(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{n-1}+(x_n \text{ の低次の項}) \tag{7.4}$$

この式を $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ で偏微分すると，それは x_n の部分には悪さをしないので結局

$$h(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{n-1}+(x_n \text{ の低次の項}) \quad (h(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathcal{H}_{n-1})$$

の形の多項式が得られます．ここに $h(x_1,\cdots,x_{n-1})$ は $(n-1)$ 変数の調和多項式で，帰納法の仮定よりうまく偏微分するとすべての $(n-1)$ 変数調和多項式を得ることができます．したがってその次元は $(n-1)!$ です．このことから $\mathcal{H}_\Delta$ に属する多項式で x_n の次数がちょうど $(n-1)$ のものが $(n-1)!$ 次元あることが分かりました．

次に（7.4）を x_n で偏微分しましょう．すると

$$(n-1)(-1)^{n-1}\Delta(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{n-2}+(x_n \text{ の低次の項})$$

となります．もちろんこれは n 変数の調和多項式です．この式をもとにして，上と同様に $x_1,\cdots,x_{n-1}$ での偏微分を考えるならば

$$h(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{n-2}+(x_n \text{ の低次の項}) \quad (h(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathcal{H}_{n-1})$$

の形の多項式が得られます．以前のものより x_n の次数が低いことに注目してください．したがって，x_n について $(n-2)$ 次の $\mathcal{H}_\Delta$ の元はやはり $(n-1)!$ 次元あることになります．

これを続けると，x_n の次数を固定したとき，$\mathcal{H}_\Delta$ に属する多項式は少なくとも各 $(n-1)!$ 次元ずつ存在することが分かります．これらに重複はありませんから，結局全体としては $(n-1)! \times n = n!$ 次元以上存在する，つまり

$$\dim \mathcal{H}_\Delta \geqq n!$$

が分かりました． ■

系 7.4

（1） 多項式環は調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ とイデアル $\mathcal{J}$ との直和です．

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

（2） 調和多項式のポアンカレ級数は

$$P(\mathcal{H}; t) = 1 \cdot (1+t)(1+t+t^2) \cdots (1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-t^k)}{(1-t)^n}$$

で与えられます．

［証明］ 次の写像を考えましょう．

$$\mathcal{H} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\mathcal{J}$$

ここで φ は $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に埋め込む包含写像（要するに調和多項式を多項式の一部だと思うということ），π は**標準射影**（ひょうじゅんしゃえい）（$\mathcal{J}$ を法として合同な多項式の同一視を行なうということ）を表わします．

定理 5.13 より $\mathcal{H} \cap \mathcal{J} = \{0\}$ ですから，この二つの写像の合成 $\pi \circ \varphi$ は単射です．一方上の定理から $\dim \mathcal{H} = n!$ ですから，当然 $\dim \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\mathcal{J} \geqq n!$ でなければならない．ところが，補題 7.2 より $\dim \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\mathcal{J} \leqq n!$ が分かっているので，商空間の次元は $n!$ であることがわかります．このことから写像 $\pi \circ \varphi$ は全単射，したがって，同型写像となります．つまり調和多項式の全体を商空間の代表元としてとってこれるということです．

これより (1) の直和の式が従います．

次にポアンカレ級数について．補題 7.2 より $\mathcal{P}^0[x_1]\mathcal{P}^1[x_2]\cdots\mathcal{P}^{n-1}[x_n]$ の中から代表元が選べることが分かっていますが，この空間の次元はちょうど商空間の次元と同じ $n!$ なので，結局これが代表元の全体であることが分かります[2]．したがって

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/\mathcal{J} \simeq \mathcal{P}^0[x_1]\mathcal{P}^1[x_2]\cdots\mathcal{P}^{n-1}[x_n]$$

が次数付きのベクトル空間の同型として成立します．したがってこれらの空間のポアンカレ級数は一致します．とくに

$$P(\mathcal{H};t) = P(\mathcal{K};t), \quad \mathcal{K} = \mathcal{P}^0[x_1]\mathcal{P}^1[x_2]\cdots\mathcal{P}^{n-1}[x_n]$$

ポアンカレ級数 $P(\mathcal{K};t)$ が系 (2) の式で与えられることは簡単にわかりますが，たとえば次のように考えるとよいでしょう．$\mathcal{K}$ における単項式は

$$1 \cdot (1 + x_2)(1 + x_3 + x_3^2) \cdots (1 + x_n + \cdots + x_n^{n-1})$$

を展開して得られた各項に一致します．したがって上の式において $t = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ とおけばポアンカレ級数が得られるというわけです．(2) の第 2 式は第 1 式を書き直したにすぎません． ■

演習 7.5　次の完全列を用いて，$\mathcal{J}$ のポアンカレ級数 $P(\mathcal{J};t)$ を求めてください．

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/\mathcal{J} \to 0 : \text{完全}$$

---

[2] 代表元はあくまでも「代表」を選んでくるわけですから無数に選び方があります．すでにやったように調和多項式も商空間の代表元系の一つです．今の場合には，まったく異なる二つの代表元系が選べるということになります．

§2　多項式環の分解

前節の最後で調和多項式の空間のポアンカレ級数(この場合はポアンカレ多項式というべきかもしれませんが)を求めました．それは次のように書けます．

$$P(\mathcal{H};t)=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-t^k)}{(1-t)^n} \tag{7.5}$$

ところで n 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ のポアンカレ級数は

$$P(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n];t)=\frac{1}{(1-t)^n} \tag{7.6}$$

なのでした．

ついでのことながら対称式の全体 S についてもポアンカレ級数を計算しておきましょう．対称式は基本対称式の多項式です．一方

$$\sum_{i=0}^{n}e_1^i\sum_{j=0}^{n}e_2^j\cdots\sum_{k=0}^{n}e_n^k=\frac{1}{(1-e_1)(1-e_2)\cdots(1-e_n)}$$

を形式的に展開すると，その各項はすべての基本対称式の単項式を網羅します．したがって e_k を t^k で置き換えるとポアンカレ級数が得られます．ここで t ではなく t^k で置き換えるのは e_k が k 次斉次式だからです．ポアンカレ級数では次数がとても大切になるので，同じ次数で置き換えをしなくてはなりません．以上から

$$P(S;t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n)} \tag{7.7}$$

となることが分かりました．

あれ?　この三つの式(7.5)，(7.6)，(7.7)を見比べてみると，何だか関係ありそうですね．そうです，この三つの級数の間には

$$P(\mathcal{H};t)P(S;t)=P(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n];t) \tag{7.8}$$

というとてもシンプルな関係式が成り立っています．この関係式はポアンカレ級数の間に偶然に成立したにすぎない式なのでしょうか？　いえ，違います．実生活では意味のない符合はよく起こりますが，数学では一見奇妙に見えても意味のない偶然の符合というのはまずあり得ません．もちろん今の場合にも対応する「何か」が起こっています．この節ではその意味を解き明かしてみたいと思います．

まず準備したいのは次の補題です．

補題 7.6　任意の多項式は調和多項式を係数とする，基本対称式の多項式で書き表わすことができます．つまり $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ は

$$f(x) = \sum_{j=(j_1, j_2, \cdots, j_n)} h_j \, e_1^{j_1} e_2^{j_2} \cdots e_n^{j_n} \quad (h_j \in \mathcal{H})$$

の形に表わされます．

［証明］　この補題は補題 7.2 の証明中のテクニックを使えば簡単に証明できます．繰り返しになりますが，再びやっておきましょう．

まず系 7.4(1) より

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J} = \mathcal{H} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] e_k$$

です．そこでこの式の $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] e_k$ の部分にこの式自身を代入しますすると

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] &= \mathcal{H} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] e_k \\ &= \mathcal{H} + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{H} e_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] e_k e_{k'}\end{aligned}$$

という式が得られます．これを何回も繰り返せばよろしい．■

さて，調和多項式を係数とする基本対称式の多項式を $\mathcal{H}[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ と書くことにしましょう[3]．上の補題ではすべての多項式は $\mathcal{H}[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ の元として表わされる，ということは述べていますが，その表わし方がただ一通りか？　ということについては言及されていません．つまり次の写像

$$\mu : \mathcal{H}[e_1, e_2, \cdots, e_n] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \tag{7.9}$$

が全射だということは分かるのですが，単射性については触れられていないということです．ところがこの単射性がポアンカレ級数の間の関係式（7.8）からわかるのです．

定理 7.7 任意の多項式は調和多項式を係数とする，基本対称式の多項式としてただ一通りに書き表わすことができます．つまり次の同型が成り立ちます．

$$\mathcal{H}[e_1, e_2, \cdots, e_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

［証明］ 写像（7.9）は係数 $\mathcal{H}$ と変数文字 $\{e_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ の形式的な多項式に対して，それを具体的に $\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ たちの多項式とみなすことで実現されます．文字 e_k の次数を k とすることで，この写像 μ は明らかに次数を変えない線型写像になります．

さて線型写像の単射性を示すにはその核 $\ker \mu$ がゼロであることを示せばよいのでした．ところが，μ が次数を保存することから，ポアンカレ級数について次の等式が成り立ちます．

$$P(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]; t) = P(\mathcal{H}[e_1, \cdots, e_n]; t) + P(\ker \mu; t)$$

したがって，$P(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]; t) = P(\mathcal{H}[e_1, \cdots, e_n]; t)$ が分かれば単射性が示せます．

ところが $\mathcal{H}[e_1, \cdots, e_n]$ のポアンカレ級数はとても簡単で，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ の単項式の係数がすべて $\mathcal{H}$ になっているわけですから，

[3] このように書いたとき，基本対称式を表わす記号 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とは独立の変数文字のように扱います．

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{H}[e_1, \cdots, e_n]; t) &= P(\mathcal{H}; t) \times P(\mathbb{C}[e_1, e_2, \cdots, e_n]; t) \\
&= P(\mathcal{H}; t) P(S; t) \quad \text{（定理 5. 7 参照）} \\
&= P(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]; t) \quad \text{（式（7. 8）を使いました）}
\end{aligned}
$$

これが証明したい式でした. ■

この定理は多項式環を調和多項式と対称式の積に分解できることを意味しています. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用を考えるときには, 対称式はすべて不変ですからまったく変化しません. したがって対称群の多項式環への作用を研究するには本質的に有限次元の空間 $\mathcal{H}$ への作用だけを考えればよいことになります. これはとても都合のよいことです.

注意深い人は $\dim \mathcal{H} = n!$ が対称群の置換の個数 $n!$ とまったく同じであることに疑いを抱いたかもしれません. すでに述べたように数学には偶然の一致ということはあまりありませんから, この二つの量が一致することには納得できる説明がつけられます. しかしそれはまた別の物語として語られるべきでしょう.

残念ながら和書でこのような話題を詳しく解説したものは見当たりません. 興味を持った諸君は, 少し専門的になりますが, [28], [26], [32], [27] などに挑戦してみてください.

第 III 部

変奏，そしてフィナーレ

第 III 部では**一般線型群**（いっぱんせんけいぐん）の物語を話しましょう．一般線型群は，平たくいえば逆行列を持つような行列たちの集まりですが，**リー群**とよばれる連続群の一つで，簡単な中にも豊かな数学の鉱脈を内に秘めています．

一般線型群は**行列環**の自己同型群として自然に行列環上の変換を引き起こします．この作用を**随伴作用**（ずいはんさよう）とよびます．第 III 部の目的はこの随伴作用を行列環上の多項式を考えることにより理解しようというものです．

有限群と連続群の違いはありますが，そこに現れるのはやはり**不変式**と**調和多項式**で，対称群の場合と同じ構図が成り立ちます．しかも不変式環は対称式の空間と本質的に同じであることが判明します!

このような随伴作用の分解の理論は一般の半単純なリー群に対しても成り立つ，詩のように美しい理論ですが，我々は 2×2 行列の場合に話を限ってその叙事詩に耳を傾けることにします．

第 8 章

行列環の $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式

対称群の不変式は方程式論で重要な役割を果たしますが，**リー群**[1]の理論においても本質的に使われます．リー群というのは，たとえば $\mathbb{R}^n$ やユークリッドの運動群といった連続的な演算を持つ，それ自身が連続的な媒体を持っているような群を指します[2]．対称群は有限群なので，このような連続性を持つ群の理論に対称式の話が本質的に結び付いているというのは意外なのですが，それがまぁ数学の面白いところです．

この章では一番簡単な（しかし一番基本的な）リー群の例として 2 次の一般線型群を扱い，対称式の理論とこのような連続群の理論が一体どのような接点を持つのかを例示したいと思います．具体的には，一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の行列環 $Mat_2(\mathbb{C})$ への作用を考え，その不変式を決定します．さらにその不変式が 2 変数の対称式とある意味で同一視できることを示します．

まずその一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ とは何者かを明らかにしましょう．

§1　一般線型群とその作用

複素数を係数とする 2×2 行列の全体を $Mat_2(\mathbb{C})$ と表わします．

$$Mat_2(\mathbb{C}) = \left\{ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

[1] Marius Sophus Lie（1842 – 1899）

[2] 本書でリー群を扱うなんていうのはとても考えられないので，その一般論は［12］，［4］を参考にしてください．

$Mat_2(\mathbb{C})$ の元で逆行列を持つもの全体を $GL_2(\mathbb{C})$ と書いて，**2 次の一般線型群**とよびます．逆行列を持つことと，行列式がゼロでないことは同値ですから

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ X \in Mat_2(\mathbb{C}) \mid \det X \neq 0 \right\}$$

と表わすことができます．ここで $\det X$ は X の**行列式**で，

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad \det X = ad - bc$$

で与えられます．また $\det X \neq 0$ のときその逆行列は

$$X = \frac{1}{\det X} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられることを思い出しておきましょう．

さて，一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の行列環 $Mat_2(\mathbb{C})$ への作用を次のように与えます．$g \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して

$$\mathrm{Ad}\,(g)X = gXg^{-1} \quad (X \in Mat_2(\mathbb{C}))$$

このとき明らかに $\mathrm{Ad}\,(g_1)\,(\mathrm{Ad}\,(g_2)X) = \mathrm{Ad}\,(g_1 g_2)X$ $(g_i \in GL_2(\mathbb{C}))$ が成り立ちます．また単位行列 1_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の単位元になりますが，その作用は恒等写像を引き起こします．つまり $\mathrm{Ad}\,(1_2)X = X$ です．この作用のことを $GL_2(\mathbb{C})$ の**随伴作用**とよびます．

さて今度は $Mat_2(\mathbb{C})$ 上の多項式 $f(X)$ をとりましょう．ここで行列環上の多項式というのは，要するに行列の四つの成分 a, b, c, d の多項式のことです．すると一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ はこの 4 変数の多項式に

$$(T_g f)(X) = f(\mathrm{Ad}\,(g^{-1})X) = f(g^{-1}Xg)$$

のように作用します．もちろん $T_g f(X)$ はまた X の多項式になっていることはいうまでもありません．ここでわざわざ逆行列 g^{-1} をとってから X に作用させているのは $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ が成り立つようにするためです．実際それは次のように確かめられます．

$$
\begin{aligned}
T_{g_1}(T_{g_2}f)(X) &= T_{g_2}f\left(g_1{}^{-1}Xg_1\right) \\
&= f\left(g_2{}^{-1}g_1{}^{-1}Xg_1g_2\right) = f\left((g_1g_2)^{-1}X(g_1g_2)\right) \\
&= T_{g_1g_2}f(X)
\end{aligned}
$$

我々の考えたい問題は次のような問題です．

問題 8.1 $Mat_2(\mathbb{C})$ 上の多項式 $f(X)$ であって

$$T_gf(X) = f(g^{-1}Xg) = f(X) \quad (\forall g \in GL_2(\mathbb{C}))$$

となるようなものはどのような多項式であるか？　またそのような多項式をすべて決定しなさい．

このような問題は対称式の問題と共通性があります．対称式の場合には，たとえば 2 変数なら x, y の入れ替えの群が作用していたり，あるいは 3 次方程式の根の全体には 3 次の対称群が作用していたりするわけです．そして対称式というのは，これら x, y とか三つの根の多項式であって，対称群の作用で変わらないもの（つまり変数を置換しても変化しないもの）のことをいうのでした．

定義 8.2 $T_gf(X) = f(X)$ $(\forall g \in GL_2(\mathbb{C}))$ が成り立つような多項式 $f(X)$ を $GL_2(\mathbb{C})$ 不変多項式，あるいは単に**不変式**とよびます．

この用語を使うと上の問題は要するに

$GL_2(\mathbb{C})$ 不変式を特徴づけて，それをすべて求めよ

ということです．よく知られているように**トレース** trace X および行列式 det X については

$$\text{trace } gXg^{-1} = \text{trace } X, \quad \det gXg^{-1} = \det X$$

が成り立ちますから，1 次式 $\text{trace}(X) = a+d$ や，2 次式 $\det(X) = ad-bc$

は不変式になっています（trace , det については次節 2 で詳しく解説します）．つまり我々の問題は自明な問題ではありません．

この問題にさらに深入りする前にまずこのトレースや行列式，そして行列の対角化の話を少し復習しておくことにしましょう．2×2 行列にもうすでに十分慣れ親しんでいる人は次の節は飛ばしてもかまいません．

§2　行列の対角化

2×2 行列 A に対して A の**トレース**を

$$\text{trace}\, A = a + d, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

と定義しましょう．このとき A の固有値は次の**固有方程式**の二つの解になります．

$$t^2 - (\text{trace}\ A)t + \det\ A = 0$$

A の成分で表わすと

$$t^2 - (a+d)t + (ad - bc) = 0$$

です．**ケイリー–ハミルトンの等式**[3]はこの場合

$$\begin{aligned} &A^2 - (a+d)A + (ad-bc)1_2 \\ &\quad = A^2 - \text{trace}\,(A)\, A + \det\,(A)\, 1_2 = 0_2 \end{aligned} \tag{8. 1}$$

と書けます．ただし 1_2 は単位行列，0_2 は**ゼロ行列**のことです．行列の成分計算をすれば容易に確かめられますので，まだこの等式を知らなかった人は一度計算してみるとよいでしょう．

さて，以下 A が相異なる二つの固有値 α, β を持つ場合 を考えましょう．

$$P_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta 1_2), \quad P_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha 1_2)$$

[3]Arthur Cayley（1821 – 1895）; William Rowan Hamilton（1805 – 1865）

とおきます．(以下面倒なので単位行列 1_2 を省略して書くことがあります．つまり $A-\alpha$ と書かれていれば $A-\alpha 1_2$ の意味であると思ってください．)

補題 8.3

(1) P_1, P_2 は直交射影になります．つまり次の等式が成立します．

$$P_i^2 = P_i \ (P_i \text{ は射影}), \quad P_1 + P_2 = 1_2,$$
$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0_2 \ (P_1, P_2 \text{ は直交する})$$

(2) A は射影 P_i を用いて $A = \alpha P_1 + \beta P_2$ と表わせます．さらに A が逆行列を持つことと $\alpha\beta \neq 0$ は同値で，この条件の下に

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha}P_1 + \frac{1}{\beta}P_2$$

が成り立ちます．

［証明］ (1) まず $P_1P_2 = 0_2$ は $(A-\alpha)(A-\beta) = 0_2$ (ケイリー–ハミルトンの等式) であることからわかります．また P_1, P_2 を加えてみると A の項がキャンセルして消えてしまうことがわかるでしょう．これより $P_1+P_2 = 1_2$ です．

さらに $P_1^2 = P_1$ は上の二つの式より

$$P_1^2 - P_1 = P_1(1_2 - P_1) = P_1P_2 = 0_2$$

がいえるので OK です．P_2 についても同じ．

(2) $A = \alpha P_1 + \beta P_2$ であることは素直に計算すれば確かめられます．次に $\alpha\beta \neq 0$ なら (1) で証明した式を用いて計算すると

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{\alpha}P_1 + \frac{1}{\beta}P_2\right) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)\left(\frac{1}{\alpha}P_1 + \frac{1}{\beta}P_2\right) \\ &= P_1 + P_2 = 1_2 \end{aligned}$$

となりますから，逆行列の式も確かめられました． ■

A は相異なる二つの固有値を持つとしましたから，スカラー行列ではありません．したがって，P_i はゼロ行列ではありません．ゼロ行列ではない

ので，P_i で写してもゼロにならないようなベクトルが在るはずです．つまり，$u_1, u_2 \in \mathbb{C}^2$ をとって $v_i := P_i u_i \neq 0$ とできます．この二つのベクトルを並べて，

$$g = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \in Mat_2(\mathbb{C})$$

とおきましょう．ここで $v_i \in \mathbb{C}^2$ は縦ベクトルとみなし，g は二つの縦ベクトルを横に並べた 2×2 の行列を表わしています．

補題 8.4 g は正則行列，つまり $g \in GL_2(\mathbb{C})$ です．さらにこの g を用いて A は対角化されます．

$$g^{-1}Ag = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

［証明］ g が正則であることを確かめるには，g の各列 P_1u_1, P_2u_2 が平行でないことを示せば十分です．もし平行ならば，たとえば $P_1u_1 = kP_2u_2$ ですが，両辺に P_1 を掛けると，

$$P_1^2 u_1 = kP_1P_2u_2 = 0$$

です．一方，$P_1^2 = P_1$ でしたのでこれは $P_1u_1 \neq 0$ とした仮定に反します．

次に $A = \alpha P_1 + \beta P_2$ が g によって対角化されることを見てみましょう．

$$\begin{aligned} g^{-1}Ag &= g^{-1}A\begin{bmatrix} P_1u_1 & P_2u_2 \end{bmatrix} = g^{-1}\begin{bmatrix} AP_1u_1 & AP_2u_2 \end{bmatrix} \\ &= g^{-1}\begin{bmatrix} \alpha P_1u_1 & \beta P_2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha g^{-1}v_1 & \beta g^{-1}v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最後の等式では $g^{-1}g = g^{-1}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{-1}v_1 & g^{-1}v_2 \end{bmatrix} = 1_2$ であることを使いました． ■

以上で A が**相異なる二つの固有値を持てば対角化できて，対角行列の成分は A の固有値になる**ことが分かりました．固有方程式が重根を持つ場合

にはいつも対角化できるとは限らないのですが，このような場合は非常に少なく，これからの話では無視して差し支えありません．

さて，最後にトレース trace(X) と行列式 det(X) が実際に不変式になっていることを確かめておきましょう．まず最初に次の補題を用意します．

補題 8.5 二つの行列 $A, B \in Mat_2(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{trace}\,(AB) = \mathrm{trace}\,(BA)$ が成り立ちます．

［証明］ これは直接の計算によって確かめることができます．実際

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

ですから，

$$\mathrm{trace}\,(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

となります．ところがこの式は a, b について対称ですから，trace(BA) に一致します． ■

定理 8.6 trace(X) および det(X) は $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式です．つまり $g \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して

$$\mathrm{trace}\,(g^{-1}Xg) = \mathrm{trace}\,(X),$$
$$\det\,(g^{-1}Xg) = \det\,(X) \quad (X \in Mat_2(\mathbb{C}))$$

が成り立ちます．

［証明］ まず trace(X) については補題 8. 5 を使って，

$$\mathrm{trace}\,(g^{-1}Xg) = \mathrm{trace}\,((g^{-1}X)g) = \mathrm{trace}\,(g(g^{-1}X)) = \mathrm{trace}\,(X)$$

と計算できます．つぎに $\det(X)$ について確かめましょう．ケイリー–ハミルトンの等式(8.1)により，

$$\det(X)\,1_2 = -X^2 - \mathrm{trace}(X)\,X$$

ですが，この両辺に左から g^{-1} を，右から g を掛けましょう．すると

$$\begin{aligned}\det(X)\,1_2 &= -(g^{-1}Xg)^2 - \mathrm{trace}(X)\,g^{-1}Xg \\ &= -(g^{-1}Xg)^2 - \mathrm{trace}(g^{-1}Xg)\,g^{-1}Xg \\ &= \det(g^{-1}Xg)\,1_2\end{aligned}$$

です．これから $\det(X) = \det(g^{-1}Xg)$ が分かります． ■

§3　$GL_2(\mathbb{C})$ 不変式と対称式

ではいよいよ最初に考えた問題を解いてみましょう．2×2 行列環 $Mat_2(\mathbb{C})$ 上の多項式の全体を $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ と書きましょう．少し複雑な記号ですが，要するにこれは 4 変数の多項式全体というのと同じことです．さて多項式 $f(X) \in \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ に対して $g \in GL_2(\mathbb{C})$ を次のように作用させたのでした．

$$T_g f(X) = f(\mathrm{Ad}(g^{-1})X), \quad \mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$$

このとき $GL_2(\mathbb{C})$ **不変式**(ふへんしき) $f(X)$ というのは $T_g f(X) = f(X)$ となるような多項式のことです．行列のトレース，行列式は不変式の代表選手といってもよいでしょう．$GL_2(\mathbb{C})$ 不変式は多項式環の部分環になります．不変式からなる部分環(**不変式環**(ふへんしきかん))を $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ と書くことにしましょう．我々の目標はこの環の構造をはっきりさせることです．

我々は $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式と 2 変数の対称式の間に関係をつけたいので，次のような $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ から 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ への制限写像を考えることにします．

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi: & \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y] \\
& \Cup & & \Cup \\
& f(X) & \longmapsto & F(x,y)
\end{array}
$$

ただし $F(x,y)$ は次の式で与えられます．

$$
F(x,y) = f\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right)
$$

要するに $F(x,y)$ は $f(X)$ において対角線上の変数だけに注目し，逆対角線の変数はゼロと思いなさいということです．

定理 8.7 $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ は 2 変数対称式の全体と同型で，同型写像は制限写像 φ で与えられます．つまり次の同型が成り立ちます．

$$
\varphi : \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})} \xrightarrow{\sim} S(x,y)
$$

［証明］ まず最初にこの制限写像がうまく定義されていることを示す必要があります．つまり，もし $f(X)$ が $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式なら $F(x,y)$ は対称式であることを示さねばなりません．数式で表わすと

$$
f(X) \in \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})} \implies F(x,y) \in S(x,y)
$$

です．

そのためには

$$
\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

とおくと

$$
\mathrm{Ad}\,(\sigma) \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}
$$

に注目すれば十分です．以下よく出てきますので，対角行列を

$$\operatorname{diag}(x,y) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

と表わすことにします．すると上の事実より

$$\begin{aligned} F(x,y) &= f(\operatorname{diag}(x,y)) = f(\operatorname{Ad}(\sigma)\operatorname{diag}(x,y)) \\ &= f(\operatorname{diag}(y,x)) = F(y,x) \end{aligned}$$

となって，確かに $F(x,y)$ は対称式です．

次に φ の全射性を示しましょう．それには $\varphi(\operatorname{trace}(X)) = x+y$ と $\varphi(\det(X)) = xy$ であること，さらに対称式の全体は基本対称式 $x+y, xy$ を代数的に独立な生成系として持つことに注意すれば明らかです．実際 φ は代数の準同型になっていますから．

次に単射性ですが，φ は線型写像なのでその核がゼロしかないことを示せば十分です．つまりゼロに写るものはゼロしかないということですね．そこで $F(x,y) = f(\operatorname{diag}(x,y)) = 0$ としてみましょう．すると行列 X が相異なる固有値 α, β を持つ場合には

$$f(X) = f(\operatorname{Ad}(g^{-1})X) = f(\operatorname{diag}(\alpha,\beta)) = F(\alpha,\beta) = 0$$

です．X が退化しているとき，つまり X がたった一つしか固有値を持たないのは，固有方程式が重根を持つ場合に相当します．この場合には固有方程式の判別式がゼロになるので

$$(\operatorname{trace} X)^2 - 4\det X = (a-d)^2 + 4bc = 0$$

したがって

$$(a-d)^2 + 4bc \neq 0 \implies f(X) = 0$$

が分かります．これより大多数の X については $f(X) = 0$ が成り立ちます．$f(X)$ は多項式ですので（あるいはより一般に連続関数なら）このような「大多数の X について $f(X) = 0$」という条件[4]からすべての X について

[4] より詳しくは「稠密（ちゅうみつ）な集合上 $f(X) = 0$」なら．

$f(X) = 0$ ということが従います. ■

系 8.8 $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式は trace (X) および det (X) の多項式として一意的に表わすことができます. つまり不変式環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ は trace , det を生成元とする多項式環です.

$$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\mathrm{trace}\,, \det\,]$$

［証明］ これは基本対称式 $x+y, xy$ が $S(x,y)$ の代数的に独立な生成元であることから従います. ■

この系が我々の問題への答を与えています. 不変式はトレースと行列式の多項式になるわけですから, こんなに分かりやすいことはありません.

系 8.9 不変式環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ のポアンカレ級数は

$$\begin{aligned} P(\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})};t) &= \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^{2k+1} \end{aligned}$$

で与えられます.

［証明］ 二つの環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ と $S(x,y)$ は次数まで込めて同型ですから,

$$P(\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})};t) = P(S(x,y);t)$$

です. $S(x,y)$ のポアンカレ級数はすでに求めました. 第 2 章を参照してください. ■

演習 8.10 自然数 n と $X \in Mat_2(\mathbb{C})$ に対して $h(X) = \mathrm{trace}\,(X^n)$ とおきましょう.

（1） $h(X)$ は不変式であることを示してください.

（2） $h(X)$ の制限写像 φ による像はどのように表わされるでしょうか?

(3) 2 を用いて,

$$\operatorname{trace}(X^2) = (\operatorname{trace} X)^2 - 2\det X$$

であることを示してください.

§4 不変式の応用

応用として次のような問題を解いてみましょう.

問題 8. 11 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ 上の,ゼロでない多項式 $f(X)$ であって,

$$f(AB) = f(A)f(B) \quad (A, B \in \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]) \tag{8.2}$$

を満たすようなものはどのようなものか? それをすべて求めなさい.

この $f(X)$ を $GL_2(\mathbb{C})$ 上で考えると[5]上の式 (8.2) は $f(g)$ ($g \in GL_2(\mathbb{C})$) が一般線型群の 1 次元表現であることを主張しています[6]. つまり上の問題は $GL_2(\mathbb{C})$ の 1 次元表現で多項式で表わせるものをすべて決定せよという問題になります.

まず注意したいのはこのような関数 $f(X)$ は $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式になるということです. 実際

$$\begin{aligned} f(g^{-1}Xg) &= f(g^{-1})f(Xg) = f(Xg)f(g^{-1}) \\ &= f(Xgg^{-1}) = f(X) \end{aligned}$$

となって確かに不変式です. そこでこの関数を制限写像 φ によって 2 変数対称式に写して考えてみましょう. 前節でやったように $F(x, y) = f(\operatorname{diag}(x, y))$ と書くことにします. すると (8.2) 式によって

[5] 多項式なので $GL_2(\mathbb{C})$ 上で決まれば $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ 上で決まります.

[6] 一般線型群の表現については第 9 章で詳しく扱います. 今の場合, (8.2) を 1 次元表現の定義にしましょう. つまり $GL_2(\mathbb{C})$ の 1 次元表現とは, 写像 $f : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ であって $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$ を満たすようなもののことです.

$$F(sx, ty) = F(s, t)F(x, y) \tag{8.3}$$

となっていることがわかります．次の一般的な補題を示しておきましょう．

補題 8.12 $F(sx, ty) = F(s, t)F(x, y)$ を満たす（対称とは限らない）2 変数の多項式 $F(x, y)$ は，もしゼロでなければ，$F(x, y) = x^m y^n$ という単項式の形をしています．

［証明］ いま $F(x, y)$ の最高次の項（x, y に関する**辞書式順序**[7]で考えます）を $cx^m y^n$ とすると（8.3）式の両辺は

$$c(sx)^m(ty)^n + (\text{より低次の項}) = F(s, t)(cx^m y^n + (\text{より低次の項}))$$

となっていますから，最高次の係数を比較して $s^m t^n = F(s, t)$ となります．

■

さて対称式が（8.3）式を満たしていると上の補題により結局 $F(x, y) = (xy)^n$ となっていることが分かります．したがってこれを φ で引き戻して考えると $f(X) = (\det X)^n$ となることが結論されます．これをまとめておきましょう．

定理 8.13 $GL_2(\mathbb{C})$ の 1 次元多項式表現は $(\det g)^n$ の形をしています．

第二の応用として次の問題を考えてみましょう．

不変式環 $J = \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ のうち定数項がないような多項式の全体を J_+ と書くことにします．

問題 8.14 行列 $X \in Mat_2(\mathbb{C})$ が $f(X) = 0$ $(\forall f \in J_+)$ を満たすとき，X はどのような行列でしょうか?

今やこの問いに答えるのは簡単です．まず，

[7] この場合，辞書式順序というのは，まず x の次数を比較して，大きいほうをとる．もし x の次数が同じなら，y の次数を比較する，という具合に x, y を合わせた次数ではなく，指定された順に前方から大小を比較するような方法を指します．アルファベットを通常の順序で比較するとちょうど辞書の単語はこの順序で並んでいます．

$$J_+ = J \cdot \mathrm{trace} + J \cdot \det$$

ですから，

$$f(X) = 0 \ \ (\forall f \in J_+) \iff \mathrm{trace}\,(X) = \det\,(X) = 0$$
$$\iff X^2 = 0$$

となります．最初の同値性は簡単です．二番目の同値性についてはケイリー–ハミルトンの等式（8. 1）を用いるのが便利です．実際トレースと行列式がゼロなら $X^2 = 0$ というのはケイリー–ハミルトンの等式そのものです．逆は次のようにして分かります．もし $X^2 = 0$ なら，両辺の行列式をとって，$\det\,(X)^2 = 0$，$\therefore\ \det\,(X) = 0$ です．したがって，ケイリー–ハミルトンの等式から

$$X^2 + \mathrm{trace}\,(X)X = 0_2 \tag{8. 4}$$

ところが，さらに $X^2 = 0$ でもあるので，$\mathrm{trace}\,(X)X = 0$ です．したがって $X = 0$ または $\mathrm{trace}\,(X) = 0$ が成り立ちますが，いずれにせよ $\mathrm{trace}\,(X) = 0$ です．

$X^2 = 0$ のように，行列 X を何乗かするとゼロ行列になるとき，X を**べき零行列**とよびます．べき零行列の全体を $\mathcal{N}$ で表わすことにしましょう．

定理 8. 15 $X \in Mat_2(\mathbb{C})$ に対して次は同値です．

（1） $X \in \mathcal{N}$，つまり X はべき零行列です．

（2） $X^2 = 0$ が成り立ちます．

（3） $f(X) = 0$ $(\forall f \in J_+)$ が成り立ちます．

［証明］（2）と（3）の同値性についてはすでに証明しました．また（2）$\Rightarrow$（1）はべき零行列の定義より明らかです．そこで（1）$\Rightarrow$（2）を示しましょう．

$X^n = 0_2$，$X^{n-1} \neq 0_2$ となるような n をとります．このとき $\det\,(X) = 0$ であることはこの定理の直前の議論から明らかです．もし $n \geqq 2$ とすると，ケイリー–ハミルトンの等式の両辺に X^{n-2} を掛けることによって（（8. 4）式参照）

$$0_2 = X^n + \mathrm{trace}\,(X) X^{n-1} = \mathrm{trace}\,(X) X^{n-1}$$

ですが，$X^{n-1} \neq 0$ より $\mathrm{trace}\,(X) = 0$ です．だから $X^2 = 0$. ■

演習 8. 16　$X \in Mat_3(\mathbb{C})$ なら X がべき零であることと，$X^3 = 0_3$ であることは同値です．これを証明してください．

演習 8. 17　$f(A+B) = f(A) + f(B)$ を満たす不変式 f は trace の定数倍であることを示してください．

演習 8. 18

（1）$X \in Mat_2(\mathbb{C})$ に対して $f(X) = \det\,(X + 1_2)$ を考えると，これは不変式です．そこで $f(X)$ を $\mathrm{trace}\,(X), \det\,(X)$ を用いて表わしてください．

（2）同じことを $f_n(X) = \det\,(X^n + 1_2)$（$n$ は自然数）に対して考えてください．

本章で紹介した物語はそのまま n 次一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ が $n \times n$ 行列環へ随伴作用している場合に拡張され，その場合には $GL_n(\mathbb{C})$ 不変式が n 変数の対称式と対応します．また不変式のゼロ点がべき零行列の全体になることも証明できます．$n \geqq 3$ の場合にはべき零行列全体のなすべき零多様体は豊富な構造を持ち，さまざまな開拓者たちが多数の美しい発見をしました．中でもパイオニアとしてシュバレー[8]とコスタント[9]の二人をあげておきたいと思います．興味を持った人は［23］とそこで引用されている文献をご覧ください．

---

[8]Claude Chevalley（1909 – 1984）:［12］参照

[9]Bertram Kostant（1928 – ）

第 9 章

$GL_2(\mathbb{C})$ の既約表現

この章では第 8 章とは違い，二変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ への $GL_2(\mathbb{C})$ の作用をまず考えます．この作用は多項式の各斉次部分への作用（= 表現）の直和に分解することがわかります．この章の目的はこのように直和に分解した k 次斉次多項式の空間がもうそれ以上分解しないこと（既約であること）を示すこと，さらに，$GL_2(\mathbb{C})$ の既約な表現が本質的にはそれで尽きることを説明することです．

以上を一言でまとめるなら，「$GL_2(\mathbb{C})$ の（有限次元）既約表現の分類を行なうこと」がこの章の目的です．

§1　$GL_2(\mathbb{C})$ の 2 変数多項式環への作用

$GL_2(\mathbb{C})$ は自然に 2 次元のベクトル空間

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mid v_1, v_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

に作用しています．つまりそれは行列の掛け算としての作用に他なりません．

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \quad g \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}^2$ の標準基底 $\{e_1, e_2\}$ をとりましょう．

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

すると g の作用は

$$g \cdot e_1 = ae_1 + ce_2, \quad g \cdot e_2 = be_1 + de_2$$

となっていることがわかります．そこで $e_1 \leftrightarrow x, e_2 \leftrightarrow y$ と対応づけるなら，多項式への $GL_2(\mathbb{C})$ の作用は

$$\rho(g)f(x,y) = f(ax+cy, bx+dy) \quad ただし\ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

のようになります．このように定義すると明らかに $\rho(g)$ は多項式の次数を保つような線型写像になっています．

さて，ここですこし一般的な状況に戻って，ある群 G が空間 X に作用しているとしましょう．群の「作用」という少し難しい言葉を使っていますが，これは群 G の元が何かある空間 X の変換を引き起こしているという意味でした．このような作用のうちで一番簡単で扱いやすいものは何でしょうか？　それは

- X が ベクトル空間 で，
- $g \in G$ によって引き起こされた変換 $\rho(g)$ が 線型変換（一次写像） である

ような場合です．もちろん，もっと簡単な場合は「何も変えないような恒等変換だけを引き起こす」場合ですが，まぁ，これは何もしないわけですから初めから除外しておいてもよいでしょう．数学では

一番簡単で理想化されたものをまず扱う

という傾向があります．このときよく扱われるのがベクトル空間と線型写像の世界なのです．

さて以上のような状況のとき，つまり，$X = V$ がベクトル空間で，群 G の元 g によって引き起こされた変換 $\rho(g) : V \to V$ が線型写像であるよう

なときに，G はベクトル空間 V 上の表現を持つといって，(ρ, V) の組を G の表現とよびます．だから「表現」というのは「群の作用」の中でも一番簡単なものです．

定義 9.1 群 G のベクトル空間 V 上の**表現**（ひょうげん）(ρ, V) とは，$\forall g \in G$ に対して，V 上の正則な線型写像 $\rho(g) : V \to V$ が定まっていて，

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2) \quad (g_1, g_2 \in G) \tag{9.2}$$

が成り立つときにいいます．

この定義は上で述べたことを少し厳密化したものですが，二つほど注意を与えておきましょう．一つは $\rho(g)$ を 正則な 線型写像とした点です．$\rho(g)$ は変換でしたが，本書では変換といえば可逆なものを考えていました[1]．線型写像は可逆であるとき正則ともよばれます．もう一つ注意すべき点は (9.2) 式です．これは群 G そのものが変換群であることを述べています．もっと具体的にいうと，群の演算である積が，変換の合成（今の場合は線型写像の合成 = 行列の掛け算）の法則に対応しているということを述べています．

(9.1) 式で定義した多項式環への $GL_2(\mathbb{C})$ の作用は明らかに線型ですが，これが群の積との整合性を保つ，つまり (9.2) 式を満たすことを示しましょう．まず (9.1) 式は

$$\rho(g)f(x, y) = f((x, y)g) \quad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

と書き直せることに注意しましょう．したがって

$$\begin{aligned}(\rho(g_1)\rho(g_2)f)(x, y) &= (\rho(g_2)f)((x, y)g_1) \\ &= f((x, y)g_1 g_2) = \rho(g_1 g_2)f(x, y)\end{aligned}$$

となり，(9.2) 式が確かめられました．このようにして本章で考える $G = GL_2(\mathbb{C})$ の多項式環への作用は表現であることが確認できました．

[1] 単に写像ではなく変換といっていたのは，そういう含みを持っていたわけです．

もちろん第5章や第7章で扱った対称群の多項式環への作用も表現になっています．したがって，もうずーっと前から「対称群の表現論」の一部を諸君は勉強していたわけです．

話を一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ に戻しましょう．定義式(9.1)を見ればすぐにわかるように $GL_2(\mathbb{C})$ の作用は多項式の次数を変えません．したがって k 次斉次の多項式のなす(有限次元の)部分空間は $GL_2(\mathbb{C})$ の作用によって保存されています．このような部分空間を**不変部分空間**とよびます．

多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ を簡単のために $\mathcal{P}$ で表わし，そのうち k 次斉次の多項式の空間を $\mathcal{P}_k$ と書きましょう．

$$\mathcal{P}=\mathbb{C}[x,y], \quad \mathcal{P}_k=\left\{\sum_{i=0}^{k} a_i\, x^i y^{k-i} \mid a_i\in\mathbb{C}\right\}$$

すると $\rho(g)$ をその部分空間に制限することによって，明らかに各不変部分空間 $\mathcal{P}_k$ には $GL_2(\mathbb{C})$ が作用しています．このようなとき，部分空間に制限された表現を**部分表現**とよびます．各空間 $\mathcal{P}_k$ は有限次元のベクトル空間ですから，部分表現 $(\rho,\mathcal{P}_k)$ は**有限次元の表現**になっています．

任意の多項式は各斉次式の和として一意的に表わされますから，多項式の全体 $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}_k$ たちの直和になります．

$$\mathbb{C}[x,y]=\mathcal{P}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k$$

この分解において，直和の各成分 $\mathcal{P}_k$ は部分表現です．このように全体の表現 $\mathcal{P}$ が部分表現の空間の直和の形に書けるとき，表現 $(\mathcal{P},\rho)$ は**部分表現の直和に分解する**といいます．

§2 既約表現

2変数 k 次斉次の多項式の全体 $\mathcal{P}_k$ は，基底として $(k+1)$ 個の単項式

$$\{x^k, x^{k-1}y, x^{k-2}y^2, \cdots, xy^{k-1}, y^k\}=\{x^i y^j \mid i+j=k\}$$

を持ちます．したがって $\mathcal{P}_k$ の次元は $(k+1)$ で，この $(k+1)$ 次元ベクトル空間に一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の表現が与えられていることになります．

まずこの表現の部分表現はどのようなものかということを考えてみましょう．多項式環全体はより小さな部分表現 $\mathcal{P}_k$ に分解したわけですから，$\mathcal{P}_k$ だってもっと「小さな」表現に分解しないとも限りません．そこで $\mathcal{P}_k$ の部分表現を探してみようというわけです．

補題 9.2 $U \subset \mathcal{P}_k$ を部分表現とします．つまり U は部分ベクトル空間（= 一次結合で閉じている）であって，$GL_2(\mathbb{C})$ の作用で不変であると仮定します．数式で表わすと

$$f(x,y) \in U \Longrightarrow \sum_i c_i \rho(g_i) f(x,y) \in U \quad (c_i \in \mathbb{C}, g_i \in GL_2(\mathbb{C}))$$

ということです．さて，任意の $f(x,y) \in U$ をとり，

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_j \, x^j y^{k-j} \quad (a_j \in \mathbb{C}) \tag{9.3}$$

と表わしましょう．このとき $a_j \neq 0$ なら $x^j y^{k-j} \in U$ です．

［証明］ この補題をラグランジュの補間公式（定理 2.4）を使って証明しましょう．行列

$$h = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

を $f(x,y)$ に作用させてみると，

$$\rho(h) f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_j \, (sx)^j (ty)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j \, s^j t^{k-j} \, x^j y^{k-j}$$

です．ここで特に $t = s^{-1}$ ととってみると（$s \neq 0$）

$$\rho(h) f(x,y) = \frac{1}{s^k} \sum_{j=0}^{k} a_j s^{2j} x^j y^{k-j} \in U$$

そこで z の k 次多項式 $F(z)$ を

$$F(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{k-j} z^j$$

と決めますと，

$$F(s^2) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{k-j} s^{2j} = s^k \rho(h) f(x, y) \in U$$

です．この式は $s \neq 0$ であるようなすべての $s \in \mathbb{C}$ について成り立っています．そこで，$s = 1, 2, \cdots, k+1$ を代入した値を考え，ラグランジュの補間公式(2.2)を第2章定理2.4の記号で $z = s^2, w_i = i^2$ として適用します．すると，

$$F(s^2) = \sum_{i=0}^{k} \frac{F((i+1)^2)}{\pi'((i+1)^2)} \cdot \frac{\pi(s^2)}{s^2 - (i+1)^2},$$
$$\pi(z) \quad = \prod_{i=0}^{k} (z - (i+1)^2)$$

であることがわかります．特に s^{2j} の係数に注目すると

$$a_j x^j y^{k-j} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\pi'((i+1)^2)} \left(\frac{\pi(s^2)}{s^2 - (i+1)^2} \text{ の } s^{2j} \text{ の係数} \right) \cdot F((i+1)^2)$$

です．ここで

$$F((i+1)^2) = (i+1)^{2k} \rho(h_{i+1}) f(x, y)$$

（ただし $s = i+1$ に対応する行列 h を h_{i+1} と書きました）

であること，$\pi(z)$ には x, y は現われないこと，の二点を考慮すれば，$a_j x^j y^{k-j}$ は $\rho(h_{i+1}) f(x, y)$ の形の多項式の一次結合であり，したがって U に属することがわかります．

さらに $a_j \neq 0$ なら $x^j y^{k-j} \in U$ が結論できるわけです．ま，もっとも，$a_j = 0$ なら初めからこの項はゼロなわけで，上でやったような苦労をすることもなかったわけですが． ■

この補題を使うと $\mathcal{P}_k$ の不変部分空間が完全に決定できます．

定理 9.3 $\mathcal{P}_k$ の不変部分空間は $\{0\}$ か $\mathcal{P}_k$ 自身かのいずれかです．

［証明］ ゼロでない不変部分空間 U をとりましょう．$U = \mathcal{P}_k$ がわれわれの示したいことです．

ゼロでないので $\exists f(x,y) \neq 0, \in U$ となる多項式が存在します．$f(x,y)$ を (9.3) 式のように表わしておくと，ゼロでないことから $\exists a_j \neq 0$ です．したがって補題 9.2 により，この j に対して $x^j y^{k-j} \in U$ がわかります．

次に $u^{\pm} \in GL_2(\mathbb{C})$ を

$$u^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおきましょう．すると

$$\begin{aligned} \rho(u^+)x^j y^{k-j} &= x^j (x+y)^{k-j} = \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l} x^{k-l} y^l \\ &= x^k + (k-j)x^{k-1}y + \cdots \in U \end{aligned}$$

がわかります．再び補題 9.2 によって $x^k \in U$ です．さらにこの x^k を使うと，

$$\rho(u^-)x^k = (x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \in U$$

したがってまたまた補題 9.2 を使えば $x^i y^{k-i} \in U \ (0 \leqq i \leqq k)$ です．これらのベクトルの一次結合で k 次斉次式は表わすことができるので，これより $U = \mathcal{P}_k$ がわかります． ■

ゼロ空間 $\{0\}$ と自分自身というのはいついかなる時でも不変部分空間なので，結局のところ不変部分空間は「当たり前のもの」しかなかったことになります．数学ではこのようなとき，「$\mathcal{P}_k$ の不変部分空間は自明(じめい)なものだけである」という具合に言い習わします．この「自明」という言葉も厄介な用語 (?) で手元にある辞典 [7] を引くと次のように書いてあります．

［自明］ 形動

（1） 常識ですぐ思いつくような状態あるいは対象しか存在しないさま，あるいはそのような状態または対象そのもの.［例］ 自明な一次関係. 自明な不変部分空間.

（2） つまらないこと. 簡単なこと.［例］ この定理の証明は自明であろう.

（3） (本質的には) とても簡単で，決まりきった手順を繰り返せば証明可能であること.［例］ この定理の証明は自明であろう.

（4） 本書ではない他の有名な本に証明が書いてあるということ.［例］ この定理の証明は自明であろう.

（5） 著者には証明不可能であることを婉曲に言い表わす.［例］ この定理の証明は自明であろう.

難しいものですね. ま，この最後の方の（4）あたりが使いこなせるようになったら，かなりできるということになるかもしれません.（ホンマカイナ）

冗談はさておき，話を $\mathcal{P}_k$ に戻しましょう. このように自明な不変部分空間しか存在しないような表現を既約表現といいます.

定義 9.4 群 G の表現 (ρ, V) が既約(きやく)とは，V が $\{0\}$ と V 自身以外に不変部分空間を持たない，つまりゼロ以外に真の部分表現を持たないときにいいます.

例 9.5 上で調べたように $(\rho, \mathcal{P}_k)$ $(k \geqq 0)$ は $GL_2(\mathbb{C})$ の既約表現です. この他にもたとえば $(\det, \mathbb{C})$ も既約表現です. この場合には表現空間は $\mathbb{C}$ で 1 次元ですから，既約であることは明らかです（1 次元ベクトル空間の部分空間は $\{0\}$ と $\mathbb{C}$ 以外にはありませんから!）. 表現になることは行列式の有名な公式 $\det g_1 g_2 = \det g_1 \cdot \det g_2$ $(g_1, g_2 \in GL_2(\mathbb{C}))$ より従います. さらに $((\det g)^k, \mathbb{C})$ $(k \in \mathbb{Z})$ も既約表現であることがすぐに確かめられます.

この「既約」という言葉は数学のさまざまな分野に現われます. 一番代表的なのが既約多項式ではないでしょうか. 既約多項式というのはもうこれ以上因数分解できないような多項式のことでした. 数学において「既約」とい

う言葉は「もうこれ以上分解できない基本的なもの」という意味でよく使われます．既約表現では，分解しようにももう不変部分空間はないのだから分解しようがない，だから分解不可能というわけです．もっとも分解不可能なら既約かというとそうでもないのですが．

既約な数学的対象は，純朴だった頃の自然科学の言葉でいえば「原子(アトム)」といってもよいと思います．現在では原子は素粒子で構成されているとか，あるいはその素粒子さえもクォークとよばれる究極の粒子に分解するというのが，現代物理学の常識的な描像となっています．[2]しかし人間がもっと楽天的だった頃には，このような原子を組合わせると，すべての「分子」，あるいはこの世に存在するありとあらゆる物質が全部わかると思われていたのです．既約表現というのはちょうどそのような「原子」の役割を果たすもので，それ以上分解できない粒子であり，すべての表現がそのようなもので構成される(直和として表わされる)べきものです．

既約表現を考えるにはいくつかのメリットがありますが，ここでは次の二つをあげておきます．

1. これ以上分解できない，自明な部分表現しか持たない表現なので，構造が単純である．
2. 一般の表現は極めて多様で多数存在するが，既約なものは非常に少なく，いくつかの簡単かつ基本的な量(不変量とよばれます)で分類できる．

つまり

既約表現は単純な構造を持っていて，しかも数が少ない

というとても理想的な状態の表現なのです．

一般の表現は先程の比喩でいえば「分子」にあたり，素朴な場合には，これ

---

[2]マイペディアより：[原子] 物質を構成する基本的要素の一つで，原子核と電子からなる．いずれも直径 10^{-8} センチ程度の粒子で，水素原子が最小．すべての物質は原子から生じたイオン，あるいは原子が組み合わさってできた分子からなりたつ．物質を構成する究極の単位としてギリシア語 atomos(分割できないもの)にちなんで atom と命名された．

らの既約表現を用いて表わされることになります．実際には，先程述べたように分解不可能な表現と既約表現の間にギャップがあるのでいつも既約表現に問題が還元できるというわけではありません．そこで既約表現の直和として表わされるような表現を**完全可約な表現**(かんぜんかやく)とよびます．本書に現われる対称群とか，一般線型群の有理表現の場合には，すべての表現が完全可約であることがわかっています．したがってこのような場合には既約表現さえわかれば，表現を研究する基本的な土台が出来上がったことになります．

演習 9. 6 $GL_3(\mathbb{C})$ は自然に行列の積で $\mathbb{C}^3$ に作用していますが，これが既約表現であることを示してください．

演習 9. 7 対称群 $\mathfrak{S}_3$ の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ 上の表現はやはり k 次斉次多項式の空間 $\mathcal{P}_k$ を不変にします．このとき部分表現 $\mathcal{P}_k$ は既約でしょうか?

§3 ウェイトと既約表現の分類

この節では証明抜きで $GL_2(\mathbb{C})$ の（有限次元の）既約表現の分類を簡単に述べておきましょう．証明は別に難しくないのですが，たくさんの言葉を用意しなくてはいけませんし，ちょっとした道具類にも慣れている必要もある．それに，まぁ，分類なんてわかってしまえばその証明はあまり面白いものじゃないですから[3]．

---

[3]というのは逃げ口上で，もちろん証明は面白いのです．いろんな証明があって，しかもその一つ一つが面白い．その証明を見ていると，ああ，数学やってるなぁと実感できる，そんな証明たちです．

ちょっと思いつくままにあげてみると，まず最高ウェイトベクトルを利用した行列要素を考える手がある．これとちょっと似ていますが，旗多様体上の直線束の切断を考える手もある（ボレル-ヴェイユの定理，あるいはリーマン-ロッホの定理）．またリー環を利用して，対角行列のスペクトル分解と昇降演算子の理論に帰着するという証明もスタンダードです．ああ，それから正則表現を分解する（ピーター-ワイルの定理）というのもありますね．

どの証明たちも魅力的でこの誘惑を振り切るのはかなり難しいですが，映画『カサブランカ』のハンフリー・ボガードを決め込むことにします．表現の構成と分類についてはたとえば [24]，[2]，[4] を参照してください．

さて既約表現を分類するためには，どの表現とどの表現が「同じ」ものかということをちゃんと決めておく必要があります．たとえば，2 次の斉次式の空間

$$\mathcal{P}_2 = \{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$$

を考えても 2 次式の空間

$$\mathcal{W}_2 = \{\alpha z^2 + \beta z + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$$

を考えてもまぁこれは似たようなものです．

え？ $GL_2(\mathbb{C})$ の作用の仕方が違うじゃないか，だって，だいたい 2 次式の空間なんて $GL_2(\mathbb{C})$ が作用しているなんて知らなかったぞ（ブツブツ）…，という声が聞こえてきそうですね．このように考えた人はなかなかよい素質を持っていると思います．実際には $\mathcal{W}_2$ には $GL_2(\mathbb{C})$ が次のように作用します．

$$\rho(g)f(z) = (bz+d)^2 f\left(\frac{az+c}{bz+d}\right) \quad f(z) \in \mathcal{W}_2$$

こういう具合に作用を決めると両者はほとんど同じものです．実際に $\mathcal{P}_2$ と $\mathcal{W}_2$ 上の作用を具体的に書いて並べてみると

$$\begin{aligned}
&\rho(g)(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) \\
&\qquad = \alpha(ax+cy)^2 + \beta(ax+cy)(bx+dy) + \gamma(bx+dy)^2 \\
&\rho(g)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \\
&\qquad = \alpha(az+c)^2 + \beta(az+c)(bz+d) + \gamma(bz+d)^2
\end{aligned}$$

ほら同じでしょ？ でも確かに一方は 2 変数斉次 2 次式の空間で，もう一方は 1 変数 2 次式の空間ですから，ものとしては違っているわけです．しかし我々はこの違っているものを「同じ」だとみなしたい．こういうときに便利なのが「同型」の概念です．

二つのベクトル空間 V_1, V_2 が同型というのは，ある全単射線型写像

$$T : V_1 \longrightarrow V_2$$

が存在することでした．しかし今は群の表現を考えているのでベクトル空間だけではカタがつきません．そこで $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ を群 G の二つの表現としましょう．すると T によって V_2 上の変換は V_1 上の変換に "引き戻され" ます．とくに変換として表現 ρ_2 をとると，

$$T^{-1}\rho_2(g)T : V_1 \to V_1 \;\; (\forall g \in G)$$

です．これがもともとの V_1 上の表現 ρ_1 と一致する，つまり

$$\rho_1(g) = T^{-1}\rho_2(g)T, \qquad \text{または} \qquad T\rho_1(g) = \rho_2(g)T \;\; (\forall g \in G)$$

となる，というのを二つの表現が同値であることの定義としましょう．

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 \\ \rho_1(g)\downarrow & & \downarrow\rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 \end{array}$$

定義 9.8 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ を群 G の二つの表現とします．この二つの表現が**同値である**とは，ある線型同型写像

$$T : V_1 \longrightarrow V_2$$

が存在して，

$$T\rho_1(g) = \rho_2(g)T \;\; (\forall g \in G) \tag{9.4}$$

が成り立つときにいいます．このとき $\rho_1 \simeq \rho_2$（あるいは $V_1 \simeq V_2$）などと書きます．

さらに同型とは限らない線型写像 $T : V_1 \longrightarrow V_2$ が（9.4）式を満たすなら，そのような T を二つの表現の間の**繋絡作用素**（けいらくさようそ）とよびます[4]．

[4] もっともこの訳語はあまり定着していません．英語では intertwining operator あるいは intertwiner とよぶので，専門家たちはだいたいインタートワイニング作用素とか単にインタートワイナーといってすませています．転絡作用素という訳語もあるようですが，こちらも一般的とはいえないようです．

補題 9.9 (ρ, V) を $GL_2(\mathbb{C})$ の表現とします．このとき

$$\rho^{(k)}(g) = (\det\, g)^k \rho(g) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

とおくと，$(\rho^{(k)}, V)$ はまた $GL_2(\mathbb{C})$ の表現になります．このとき ρ が既約なら $\rho^{(k)}$ も既約表現です．さらに $k \neq 0$ なら ρ と $\rho^{(k)}$ は同値ではありません．

［証明］ どれも簡単です．まず $(\rho^{(k)}, V)$ が表現であることですが，$\rho^{(k)}(g)$ は $\rho(g)$ のゼロでない定数倍なので，V 上の正則な線型写像です．そこであとは (9.2) 式を確認すればよいだけです．

$$\begin{aligned}\rho^{(k)}(g_1)\rho^{(k)}(g_2) &= (\det\, g_1)^k \rho(g_1) \cdot (\det\, g_2)^k \rho(g_2) \\ &= (\det\, g_1 g_2)^k \rho(g_1 g_2) \\ &= \rho^{(k)}(g_1 g_2)\end{aligned}$$

これで定義通り表現になっていることが確認できました．

既約性については，もし ρ に関する不変部分空間があれば，$\rho^{(k)}$ の方は単に ρ の定数倍にすぎないので明らかに $\rho^{(k)}$ についても不変です．逆も同様．

最後に同値性について．繋絡作用素 $T : V \to V$ を考えます．すると

$$T\rho(g) = \rho^{(k)}(g)T = (\det\, g)^k \rho(g)T \tag{9.5}$$

です．T の固有ベクトル $v \in V, \neq 0$ をとり，その固有値を λ としましょう．

$$Tv = \lambda v \quad (v \in V,\ v \neq 0)$$

そこで $\lambda \neq 0$ として矛盾を示します．これが示されれば，T は必ず固有値ゼロを持つことになり，線型同型にはなり得ないことがわかります．

式 (9.5) の両辺を v に適用すると

$$T\rho(g)v = (\det\, g)^k \rho(g)Tv = \lambda(\det\, g)^k \rho(g)v$$

となって，この式は $\rho(g)v \neq 0$ が T の固有値 $\lambda(\det\, g)^k$ を持つ固有ベクトルであることを示しています．ところが $(\det\, g)^k$ は無限個の値をとります

ので，もし $\lambda \neq 0$ なら T は無限個の固有値を持つことになってしまいます! 固有値は固有方程式の解ですから，有限個しかないのでこれは矛盾です．■

定理 9. 10 $GL_2(\mathbb{C})$ の既約表現は

$$\mathbf{Irr}\,(GL_2(\mathbb{C})) = \{(\rho^{(m)}, \mathcal{P}_k) \mid m \in \mathbb{Z}, k \geqq 0\}$$

のいずれかの表現に同値です．ただし $\rho^{(m)}(g) = (\det g)^m \rho(g)$ と書きました．また $\mathbf{Irr}\,(GL_2(\mathbb{C}))$ に属する表現は互いに同値ではありません．

［証明］ 任意の既約表現が $\mathbf{Irr}\,(GL_2(\mathbb{C}))$ のいずれかの表現に同値という部分は少し難しいので本書では証明しません．

$\mathbf{Irr}\,(GL_2(\mathbb{C}))$ に属する表現が互いに同値でないことは，次元が異なれば表現は互いに同値ではないことと，上の補題 9. 9 によりわかります．■

これらの既約表現はどのように区別できるでしょうか? それをちょっと考えてみましょう．まずは表現の次元が重要な**不変量**(ふへんりょう)になります．つまり $\det^m$ の部分をのぞくと，各既約表現は次元だけで決まってしまうわけです．では行列式の部分はどのように決定すればよいでしょうか? それには次のような行列の作用を考えるのが簡単で確実な方法です．

$$C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{C}, \neq 0)$$

C はスカラー行列で，すべての行列と**可換**(かかん)であることに注意しましょう．ここで C と X が可換であるというのは $XC = CX$ が成り立つこと，つまり積が交換可能であるということです．また，このようにすべての群の元と可換なもの全体を群の**中心**(ちゅうしん)とよびます．一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の中心は（ゼロでない）スカラー行列の集合に一致することが比較的簡単に証明できます．

C の $(\rho^{(m)}, \mathcal{P}_k)$ 上の作用がどうなっているのかを見てみると，

$$\begin{aligned} \rho^{(m)}(C)f(x,y) &= (\det C)^m f(cx, cy) \\ &\triangleq c^{2m} c^k f(x,y) = c^{2m+k} f(x,y) \end{aligned}$$

となっています．等号 $\overset{\triangle}{=}$ の部分は $f(x,y)$ が k 次斉次式であることから従います．この式を見ると $\rho^{(m)}(C)$ はどの多項式 $f(x,y)$ に対しても c^{2m+k} というスカラー倍で作用していることがわかります．したがって，行列式の部分を決定している整数 m は次元 $k+1$ と $\rho^{(m)}(C)$ の値 c^{2m+k} がわかれば決定できますね．特に 中心の固有値 c^l $(l=2m+k)$ を決めると，表現の次元 $k+1$ は必然的に l と反対の偶奇を持つ ことに注意しましょう．

では一般の有限次元表現 (τ,V) はどのように考えればよいでしょうか? まず最初に「一般線型群の有限次元表現は完全可約である」ことを認めることにしましょう．この「完全可約」というのは既約表現のいくつかの直和に表わすことができるという意味なのでした．そこで，

$$(\tau,V)=\sum_{m\in\mathbb{Z},k\geqq 0}^{\oplus} M_{m,k}(\rho^{(m)},\mathcal{P}_k)$$

と直和に書けたとしましょう．ここで $M_{m,k}$ は非負の整数で，**重複度**（ちょうふくど）とよばれます．これは対応する既約表現 $(\rho^{(m)},\mathcal{P}_k)$ が一体何回直和の中に現われるのかを記述する整数です．また記号 $\sum^{\oplus}$ は直和を表わす記号です．

さてこのようなときには，とりあえず行列式の部分を無視するのが便利です．そのためには $\det g=1$ となるような行列たちを考えるとよいでしょう．このような行列の全体を**特殊線型群**（とくしゅせんけいぐん）とよんでいます．記号で

$$SL_2(\mathbb{C})=\{g\in GL_2(\mathbb{C})\mid \det g=1\}$$

と書きます．たとえば

$$A=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1}\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{C})\quad (s\in\mathbb{C},\neq 0)$$

ですね．この行列による $(\rho^{(m)},\mathcal{P}_k)$ への作用を見てみると，

$$\begin{aligned}
\rho^{(m)}(A)f(x,y) &= f(sx, s^{-1}y) \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j (sx)^j (y/s)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j s^{2j-k} x^j y^{k-j}
\end{aligned}$$

となっています．基底として $\{x^j y^{k-j}\}$ をとっておくと，基底の各元はそれぞれ定数倍 s^{2j-k} 倍されるだけです．少し洗練された言い方をすると，各 s^{2j-k} は $\rho^{(m)}(A)$ の固有値ということです．表現論の方言ではこのことを $x^j y^{k-j}$ は**ウェイト** s^{2j-k} を持つといいます．まったく同じ事実なのに，数学という分野の中でもこうも言い方が違うというのは何だか面白いですね．

各基底がどのようなウェイトを持つのかを表にしてみたら次のようになります．

基底	y^k	xy^{k-1}	x^2y^{k-2}	$\cdots$	x^jy^{k-j}	$\cdots$	$x^{k-1}y$	x^k
ウェイト	s^{-k}	s^{2-k}	s^{4-k}	$\cdots$	s^{2j-k}	$\cdots$	s^{k-2}	s^k

この表を見ると，ウェイトの部分は s のべきが $(-k)$ 乗から k 乗までちょうど偶数差だけ，重複なしに並んでいることがわかります．このような $\rho^{(m)}(A)$ の固有値の分布を**ウェイト分布**とよびます．ウェイト分布が決まれば既約表現は（行列式の因子を除いて）完全に決定されますが，少し考えてみるとウェイト分布がわかっていれば，任意の有限次元表現を行列式因子を除いて既約分解できることもわかります．

定理 9.11 $GL_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現は完全可約です．さらにその既約表現への分解は，まず中心 $C = c1_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ の固有値に表現を分解した後，さらにウェイトの分布状況がわかれば決定できます．

［証明］ 有限次元表現が完全可約であることは証明抜きで認めることにしましょう．さらに既約表現への分解を一般的に証明してもいいのですが，ちょっとした例を考えたほうがわかりやすいでしょう．

基本的な考え方はこうです．まず中心の固有値を固定すると，$k+1$ 次元

の表現というのはただ一つしかないことに注意します．したがって中心の固有値を固定したときに，ウェイト分布だけを見て，各 $k+1$ 次元の既約表現への分解ができればよいわけです．そのあと，中心の固有値と比較して，それがどの既約表現 $(\rho^{(m)}, \mathcal{P}_k)$ に対応しているかを調べます．

たとえば中心 $C = c1_2$ の固有値が c^3 で，ウェイト分布が

$$s^{-5} + 3s^{-3} + 4s^{-1} + 4s^1 + 3s^3 + s^5 \tag{9.6}$$

となっていたとしましょう．もちろんウェイト分布は必然的に $\pm$ 対称です．またウェイトの偶奇は中心の固有値 c^3 のべきの偶奇と一致しなければならないのでした（表現の次元は反対の偶奇性を持ちます）．

ウェイト分布を見ると，まず 6 次元の表現が一つ含まれていることがわかります．そこで 6 $(k=5)$ 次元の表現のウェイト分布を（9.6）から引き去りましょう．残るのは

$$2s^{-3} + 3s^{-1} + 3s^1 + 2s^3$$

です．すると今度は 4 $(k=3)$ 次元の表現のウェイトが二重に含まれていることがわかりますので，これも除きます．

$$s^{-1} + s^1$$

残ったのは 2 $(k=1)$ 次元のウェイト分布ですね．このようにして，ウェイト分布が（9.6）式で与えられる表現は

（6 次元既約表現）$\oplus$ 2（4 次元既約表現）$\oplus$（2 次元既約表現）

と分解することがわかりました．さて，中心の固有値は c^3 ですから，$3 = 2m + k$ であったことを考えると，もとの表現は

$$(\rho^{(-1)}, \mathcal{P}_5) \oplus 2(\rho^{(0)}, \mathcal{P}_3) \oplus (\rho^{(1)}, \mathcal{P}_1)$$

と分解していることがわかります． ■

n 次一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の既約有限次元表現は最高ウェイトの理論によって完全に分類されます．この理論は美しく，また実用的なのですが本書には

少し荷(ウェイト)が重すぎるようです．表現の分類には通常ヤング図形[5]というものが用いられ，組合せ論などと関係して数学のほとんど至る所に顔を出します．興味のある諸君は[2]，[4]を参照してください．またヤング図形に関しては[22]を読むとよいでしょう．

---

[5]Alfred Young (1873 – 1940)

第10章

一般線型群の行列環上の表現

複素数を係数とする 2×2 行列の全体を $Mat_2(\mathbb{C})$ と表わしました.

$$Mat_2(\mathbb{C}) = \left\{ X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$$

第 8 章ではこの 2×2 行列環上の多項式に $GL_2(\mathbb{C})$ が作用していて，その不変式を考えたのでした．この一般線型群の作用は明らかに線型ですから，我々は意識せずに $GL_2(\mathbb{C})$ の表現を考えていたことになります．不変多項式というのは，$GL_2(\mathbb{C})$ が作用しても変わらないものですから，これは「自明な」表現を表わしていると考えられます．

つまり第 8 章でやったのは 2×2 行列上の多項式環を一般線型群の表現として分解したときに一体どれくらいの自明な表現がそこに含まれているのかを探求したことになります．ところが前章（第 9 章）では一般線型群の表現の分類を紹介しましたので，今や我々は自明な表現だけではなく，一般の表現についても十分な知識を持っています．

そこでこの章では，本書の仕上げとして，

行列環上の一般線型群の表現を完全に分解する

という問題を考えてみましょう．この計画を細部まで細かく実行するのは少し野心的すぎますから，本書では大枠だけを紹介して，既約表現への分解を実感するくらいで満足することにします．しかしこの章で扱う問題と，そこ

に現われる現象は，とても重要かつ一般性のある問題なのです．そのことを理解してもらうために対称群の表現について第 5 章と第 7 章ででかなり詳しく紹介しました．本章で扱われる一般線型群の表現の理論は対称式と調和多項式の理論の一般化となっています．

§1　ゼロウェイトの空間

抽象的にこの章の目標を述べましたが，問題を数学的に定式化するために少し具体的な計算をしておきましょう．

まず行列環上の多項式環の生成元と生成元への $GL_2(\mathbb{C})$ の作用について．次の 2×2 行列 X をとりましょう．

$$X=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\in Mat_2(\mathbb{C})$$

このとき多項式環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の生成元として，$\{z_{i,j}\mid 1\leqq i,j\leqq 2\}$ という一次関数たちを座標 $\{a_{i,j}\mid 1\leqq i,j\leqq 2\}$ の双対としてとることにします．$z_{i,j}$ は

$$z_{i,j}(X)=a_{i,j}\quad (1\leqq i,j\leqq 2)$$

で定義されるような関数たちです．座標と関数はほぼ同じものなのですが，やはりしっかり区別しておくほうが賢明です．この四つの一次関数の多項式全体が $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ というわけです．そこで $\{z_{i,j}\mid 1\leqq i,j\leqq 2\}$ のことを生成関数系ともよびます．

さて，多項式環上の $g\in GL_2(\mathbb{C})$ の作用，あるいは表現，は一体どう表わされるのでしょうか?

$$g=\begin{bmatrix} s & u \\ v & t \end{bmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$$

と書いておくと，

$$g^{-1}Xg=\frac{1}{\det g}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} sta_{11}-sua_{21}+vta_{12}-vua_{22} & ut(a_{11}-a_{22})-u^2a_{21}+t^2a_{12} \\ -sv(a_{11}-a_{22})+s^2a_{21}-v^2a_{12} & -uva_{11}+sua_{21}-vta_{12}+tsa_{22} \end{bmatrix}$$

ですから，たとえば

$$z_{11}(g^{-1}Xg) = \frac{1}{\det g}(stz_{11}(X) - suz_{21}(X) + vtz_{12}(X) - vuz_{22}(X))$$

となっています．したがって

$$T_g z_{11} = \frac{1}{\det g}(stz_{11} - suz_{21} + vtz_{12} - vuz_{22})$$

というわけです．これを行列の形にまとめて書くと

$$\begin{bmatrix} T_g z_{11} & T_g z_{12} \\ T_g z_{21} & T_g z_{22} \end{bmatrix} = g^{-1} \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} g$$

です．なんだか紛らわしいですが，この行列はあくまでも多項式を要素とする行列であることにご注意ください．

とくに中心の元 $C = c1_2$ はどう作用するかというと，C はすべての 2×2 行列と可換なので，

$$T_C f(X) = f(X)$$

がわかります．つまり中心は自明に作用しています．

系 10.1 多項式環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ を $GL_2(\mathbb{C})$ の表現として分解すると，奇数次元の表現のみで分解されます．

［証明］ 中心の固有値を c^l とすると，既約表現の次元は l と反対の偶奇を持つのでした（167 ページ参照）．今の場合 $l = 0$ は偶数ですから，既約表現の次元は奇数次元のみ現われます． ■

中心は自明に作用していることがわかったので，$GL_2(\mathbb{C})$ の表現として $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ を分解しようとすると，ウェイト分布だけを調べればよいということになります．また多項式の各斉次部分はもちろん不変部分空間になっていますから，各斉次部分を既約分解すれば事足ります．では k 次斉次多項式の空間は一体どのように分解するのでしょうか?

$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の k 次斉次の多項式の空間を M_k と書きましょう．すると

$$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})] = \sum_{k \geqq 0}^{\oplus} M_k$$

と直和に分解しています．さらに系 10.1 によれば M_k は $GL_2(\mathbb{C})$ の奇数次元の既約表現の直和になっているはずです．次元 $2l+1$ の既約表現のウェイト分布は,

$$s^{-2l} + s^{2-2l} + \cdots + s^{-2} + s^0 + s^2 + \cdots + s^{2l}$$

となっていたことを思い出しましょう．したがってゼロウェイト s^0 は各既約表現につき一回ずつ現われることがわかります．そこでまずこのゼロウェイトの空間が一体どれくらいあるのかを考えてみることにします．ここでもポアンカレ級数を考えるのが役に立ちます．

一次関数のウェイトを計算してみます．一次関数は $z_{i,j}$ $(1 \leqq i, j \leqq 2)$ でしたから,

$$g = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}, \neq 0)$$

の作用は

$$\begin{bmatrix} T_g z_{11} & T_g z_{12} \\ T_g z_{21} & T_g z_{22} \end{bmatrix} = g^{-1} \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} z_{11} & s^{-2} z_{12} \\ s^2 z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

となります．したがって z_{11}, z_{22} はウェイトがゼロ (または s^0)，z_{12} はウェイトが -2 (または s^{-2})，z_{21} はウェイトが 2 (または s^2) です．このことから容易に $z_{i,j}$ の単項式もウェイトを持つことがわかります．そのウェイトは,

$$z_{11}^{i_{11}} z_{12}^{i_{12}} z_{21}^{i_{21}} z_{22}^{i_{22}} \text{ に対して } -2i_{12} + 2i_{21} \text{ (または } s^{-2i_{12}+2i_{21}})$$

です．以後べきの形で書くのが繁雑なので，<u>ウェイトは s のべき指数のみを記す</u> ことにします．

ではウェイトがゼロの多項式はどれぐらいあるのかというと，単項式については z_{12} と z_{21} のべき指数が等しいことが条件です．だから結局それは

z_{11} と z_{22} および $z_{12}\cdot z_{21}$ の多項式であるということができるでしょう．したがってそのポアンカレ多項式は

$$\begin{aligned}
&P\,(\text{ゼロウェイトの多項式の空間}\,;\,t\,)\\
&= \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)} = \frac{(1+t)^2}{(1-t^2)^3}\\
&= (1+t)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+2}{l} t^{2l}\\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \binom{l+2}{l} + \binom{l+1}{l-1} \right\} t^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} 2 \binom{l+2}{l} t^{2l+1}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 t^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) t^{2l+1}
\end{aligned}$$

で与えられます．

これで k 次斉次式の空間 M_k が一体何個の既約表現に分解するのかがわかりました．それはゼロウェイトの空間の次元に等しいわけですから，

$k=2l$ が偶数なら　　$(l+1)^2 = (k+2)^2/4$ 個の既約表現，

$k=2l+1$ が奇数なら　$(l+2)(l+1) = (k+3)(k+1)/4$ 個の既約表現

に分解されます．

§2　調和多項式

対称群の作用のときと同じようにここでも調和多項式を考えてみることにしましょう．すでに $GL_2(\mathbb{C})$ 不変な多項式は求めてあります．それはトレース trace (X) と行列式 det (X) の多項式になっているのでした．そこで $GL_2(\mathbb{C})$ の作用に関する調和多項式は次のように定義するのが自然でしょう．

定義 10. 2　$h(z) \in \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ が（$GL_2(\mathbb{C})$ の作用について）**調和**であるとは，次の微分方程式を満たすときにいいます．

$$\begin{cases} \partial(\mathrm{trace})h(z) &= 0 \\ \partial(\det)h(z) &= 0 \end{cases}$$

この微分方程式を具体的に書き下すと次のようになります．

$$(\partial_{11} + \partial_{22})\, h(z) \qquad = 0 \tag{10.1}$$

$$(\partial_{11}\,\partial_{22} - \partial_{12}\,\partial_{21})\, h(z) = 0 \tag{10.2}$$

もちろんここで $\partial_{i,j} = \dfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}$ です．また多項式 $f(z)$ に対して $\partial(f)$ というのは §3 でもやったように $z_{i,j} \to \partial_{i,j}$ という置き換えによって得られた偏微分作用素を表わします．

$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の中の $GL_2(\mathbb{C})$ 調和多項式の全体を $\mathcal{H}$ と書くことにしましょう．対称群のときにやったように，その定義の仕方から $\mathcal{H}$ はベクトル空間で，偏微分することによって不変，さらに $GL_2(\mathbb{C})$ の作用でも不変になります．したがって $\mathcal{H}$ は一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の表現空間になっています．

対称群のときには，多項式環の構造や調和多項式と対称式への分解だけに注目して，調和多項式が対称群によってどのような作用を受けるのかについてはまったく考えませんでした．しかし，不変式あるいは対称式の空間には群は自明に作用している（何も変化させない）わけですから，

表現を考えるのなら調和多項式の空間こそが考えるべき空間

なのです!

そこで以下では調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ が $GL_2(\mathbb{C})$ の表現としてどのように分解するのかを考察しましょう．$GL_2(\mathbb{C})$ の表現を見るときには，すでにやったように，ゼロウェイトの空間に注目するのが便利です．

補題 10.3 ゼロウェイトを持つような $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の多項式で，微分方程式（10.1）を満たすものは $z_{11} - z_{22}$ と $z_{12} \cdot z_{21}$ の多項式として表わされます．

［証明］ まずゼロウェイトを持つような多項式は，z_{11}，z_{22} と $z_{12} \cdot z_{21}$ の多項式なのでした．ところで微分方程式（10.1）は変数 z_{12}，z_{21} とは無関係

ですから，結局二つの変数 z_{11} と z_{22} の多項式で微分方程式 (10. 1) を満たすものが特徴づけられればそれでおしまいです．

ところが二変数 x, y の多項式 $f(x,y)$ であって

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

を満たすものが $(x-y)$ の多項式になることは，定理 1. 16 で証明しました．

■

ゼロウェイトを持つ調和多項式を決定するには，残る微分方程式 (10. 2) を考えればよいことがわかります．そこでこの方程式を解いてみましょう．だいたい

偏微分方程式は解けない

と相場は決まっているのですが，今の場合は幸い多項式だけを相手にしているので簡単に解けてしまいます．この方法は微分方程式のべき級数解を決定するときもだいたい同じなので，一度体験しておくとよいと思います．

問題の多項式 $h(z)$ は k 次斉次式だとして一般性を失いません．そこで k を固定して

$$h(z) = \sum_{i+2j=k} \gamma_j (z_{11} - z_{22})^i (z_{12} \cdot z_{21})^j \quad (\gamma_j \in \mathbb{C})$$

と書きましょう．j を決めると $i = k - 2j$ と i が決まってしまうので，係数 γ_j の添字には j だけをつけています．すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{11} \partial z_{22}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{12} \partial z_{21}} \right) h(z) \\
&\quad = \sum_{i+2j=k} \gamma_j \left\{ -i(i-1)(z_{11} - z_{22})^{i-2} (z_{12} \cdot z_{21})^j \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - j^2 (z_{11} - z_{22})^i (z_{12} \cdot z_{21})^{j-1} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{[k/2]-1} \Big\{ -\gamma_j(k-2j)(k-2j-1)(z_{11}-z_{22})^{k-2j-2}$$

$$-\gamma_{j+1}(j+1)^2(z_{11}-z_{22})^{k-2(j+1)}\Big\}(z_{12}\cdot z_{21})^j$$

で，これがゼロになるわけですから，係数の間に次の漸化式が成り立ちます．

$$\gamma_j(k-2j)(k-2j-1)+\gamma_{j+1}(j+1)^2=0 \quad (0 \leqq j < [k/2])$$

この漸化式を解いて

$$\gamma_j = (-1)^j \binom{k}{j\ j\ (k-2j)} \gamma_0 \ \ (0 \leqq j \leqq [k/2])$$

$$\text{ただし}\ \binom{k}{j\ j\ (k-2j)} = \frac{k!}{j!\cdot j!\cdot (k-2j)!}$$

この式に出てくる二項係数の親類みたいなのは**多重項係数**(たじゅうこうけいすう)(この場合には3重項係数ですが)とよばれる数で，上のように階乗を使って書くこともできますが，より二項係数っぽく扱うのなら

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i\ j\ k} x^i y^j z^k$$

という展開式の係数として定義されます．

これで我々の調和関数の形が完全に決定されました．これをまとめておきましょう．

定理 10. 4 ゼロウェイトを持つ k 次斉次の調和多項式は次の多項式 $h(z)$ の定数倍です．

$$h(z) = \sum_{i+2j=k} \binom{k}{i\ j\ j} (z_{11}-z_{22})^i (-z_{12}\cdot z_{21})^j$$

このとき，$h(z)$ は $(z_{11}-z_{22}+z_{12}-z_{21})^k$ のゼロウェイトを持つ項をすべて集めて和をとったものです．

［証明］ $h(z)$ は $\gamma_0=1$ とおいて係数の具体的なかたちを使えばすぐに書き下すことができます．多重項係数では下段の数字の列の順番は重要ではな

く，どの順番であってもかまわないこと，さらに $i=k-2j$ であることにも注意しておきましょう．また二番目の主張は多重項係数の意味を考えればほぼ明らかです．多項式 $(z_{11}-z_{22}+z_{12}-z_{21})^k$ 自身調和になっていることにも注意しておきます． ■

定理 10.5 k 次 $GL_2(\mathbb{C})$ 調和多項式の空間を $\mathcal{H}_k$ と書くと，$\mathcal{H}_k$ は次元が $2k+1$ の既約表現になります．また中心の元は自明に作用しますから，定理 9.10 の記号を使うと

$$\mathcal{H}_k \simeq (\rho^{(-k)}, \mathcal{P}_{2k})$$

です．

［証明］ $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の分解には奇数次元の既約表現しか現われないのでした．そこでゼロウェイトの空間を調べれば，その表現がいくつの既約表現に分解するのかが判定できます．

しかし上の定理でわかったように k 次の調和多項式でゼロウェイトを持つものは定数倍を除いて一意的だったので，分解に現われる既約表現もただ一つ，つまり $\mathcal{H}_k$ 自身が既約表現であることになります．中心の元が自明に作用していることはすでにわかっているので，あとは次元を決めれば $GL_2(\mathbb{C})$ の表現として完全に決まることになります．

次元はどのように決まるかというと，ウェイト分布を調べてそのうちで一番大きなウェイト（最高ウェイトとよびます）に 1 を加えたものが次元です．これを利用しましょう．

明らかに k 次斉次の（調和とは限らない）多項式中で最高のウェイトを持つものは z_{21}^k であって，そのウェイトは $2k$ です．ところが都合のいいことに，この場合には z_{21}^k は調和多項式になっています! つまり単に k 次斉次式で考えても調和多項式で考えても最高のウェイトは $2k$ です．調和多項式の空間は既約なのですから，次元は $2k+1$ になります． ■

§3　ポアンカレ級数と多項式環の分解

いよいよ大団円が近づいてきました．我々はこれで不変多項式と調和多項式の構造を完全に把握しました．対称群の場合を指導原理とすると，全体の多項式環はこの二つの空間の積として表わされるのではないかという，かなり都合のいい期待が胸をくすぐります．この問題に応える準備はすでに整いました．あとは一気にインド洋をめざすのみです．たとえ行き着く先がカリブ海の小群島だったとしても．

系 10. 6　$GL_2(\mathbb{C})$ 調和多項式の空間 $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ のポアンカレ級数は

$$P(\mathcal{H};t) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)t^k = \frac{1+t}{(1-t)^2}$$

で与えられます．

一方，系 8. 9 によって $GL_2(\mathbb{C})$ の不変式環 $J = \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]^{GL_2(\mathbb{C})}$ のポアンカレ級数は

$$P(J;t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$$

でしたから，

$$\begin{aligned} P(\mathcal{H};t)\cdot P(J;t) &= \frac{1+t}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} \\ &= \frac{1}{(1-t)^4} = P(\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})];t) \qquad (10.\,3) \end{aligned}$$

となることがわかります．

このポアンカレ級数間の等式（10. 3）は，多項式環 $\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ が調和多項式 $\mathcal{H}$ と $GL_2(\mathbb{C})$ 不変式 J の積（の一次結合）に書けるであろうことの強烈な状況証拠です．残念なことに，状況証拠だけでは犯人逮捕というところまではいきません．しかし我々は真実にかなり近いところまではるばると

やってきました．

以下は真実に到達できる確実な，しかし初心者にはかなり峻険な登山路のガイドマップです．すでに対称群の場合には我々はこの山を征服していますから，多分読者のみなさんの少しの努力があればガイド通りに登頂に成功するだろうことを信じています．

まず対称群の場合と同じように，定数項のない不変式のなす イデアル $\mathcal{J} = \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})] \cdot J_+$ を考えましょう．$\mathcal{J}$ は trace と det で生成されたイデアルといっても同じです．すると

$$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})] = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

であることがわかります．この部分はじつは general non-sense と数学者の間ではしばしばよばれるような決まりきった手続きによってわかるのですが，証明は割愛します．一方

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]\,\mathrm{trace} + \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]\,\det \\ &= (\mathcal{H} + \mathcal{J})\,\mathrm{trace} + (\mathcal{H} + \mathcal{J})\,\det \end{aligned}$$

ですから，この手続きをどんどん繰り返すことにより，積をとる写像

$$\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[\mathrm{trace}, \det] \longrightarrow \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})] \tag{10.4}$$

が全射であることがわかります．ここで $\mathcal{H} \otimes J$ と書いたのはテンサー積の記号で，その意味するところは $\mathcal{H}$ と J の積をとって，さらにその一次結合全体を考える，というぐらいのものです．しかしテンサー積には「普遍性」とよばれる性質が要求されていて，正確に述べようとすると（そして実例を理解して使いこなせるようにしようとすると）かなりの時間を必要とします．我々は先を急ぐことにしましょう．

いったん（10.4）式の全射性がわかると，ポアンカレ級数の間の等式（10.3）が威力を発揮します．我々の示したいことは（10.4）式が同型写像であるということなので，あとは単射性を示せば十分です．ところがポアンカレ級数というのは各斉次部分の次元の情報をすべて集めたものでした．全射はわ

かっているのですから，あとは各斉次部分で次元を比較すれば単射性がわかります．

定理 10. 7

（1） $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ を $GL_2(\mathbb{C})$ の作用に関する調和多項式の全体とします．このとき任意の多項式 $f(z) \in \mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ は調和多項式を係数とする trace, det の多項式として一意的に表わされます．

$$f(z) = \sum_{i,j \geqq 0} h_{i,j}(z)\,\mathrm{trace}^{\,i}\,\det^{\,j} \quad (h_{i,j}(z) \in \mathcal{H})$$

ここに $\mathrm{trace} = z_{11} + z_{22}$，$\det = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ です．

（2） $\mathcal{H}$ は $GL_2(\mathbb{C})$ の表現として次のように既約分解します．

$$\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_k \simeq \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} (\rho^{(-k)}, \mathcal{P}_{2k})$$

この定理は（10. 4）式で与えられた積写像が $GL_2(\mathbb{C})$ 同型写像であるということと同じ内容を含んでいます．

例 10. 8 たとえば 3 次式の空間は

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_3 \oplus (\mathcal{H}_2 \cdot \mathrm{trace}) \oplus (\mathcal{H}_1 \cdot \det) \oplus \left(\mathcal{H}_1 \cdot \mathrm{trace}^{\,2}\right)\\ &\quad \oplus (\mathbb{C}\,\mathrm{trace} \cdot \det) \oplus \left(\mathbb{C}\,\mathrm{trace}^{\,3}\right)\end{aligned}$$

という具合に分解します．したがって 3 次式の空間は $GL_2(\mathbb{C})$ の表現としては

（7 次元表現）$\oplus$（5 次元表現）$\oplus$ 2（3 次元表現）$\oplus$ 2（1 次元表現）

と分解することがわかります．もちろん中心は自明に作用しています．

演習 10. 9

（1） 上と同じようにして，$\mathbb{C}[Mat_2(\mathbb{C})]$ の 2 次式，4 次式の空間を $GL_2(\mathbb{C})$ の表現として既約分解してください．

（2） 既約表現に現われる表現の個数が §1 でゼロウェイトを使って求めた個数と一致することを確認してください.

本章で紹介した話題はじつは一般の半単純リー群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現と，その上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の分解へと拡張されます! この理論はとても美しい，一種の詩を思わせるような理論で 1950 ∼ 1960 年代にかけてコスタントというエネルギッシュでいかつい体格の冒険家によって開拓されました. 今や開拓された原野は広い牧場となり，たくさんの数学者がそこで生活するようになっています. コスタントの数学を評して「ブルドーザが通ったように後にはペンペン草も生えない」といった人もいますが，私にはそうは思えません. 原論文となった［29］，［30］は今でもその輝きを失わず，未来の冒険家たちにその光でもってすすむべき道を指し示しているように見えます.

参考文献

[1] 岩井斉良, ホモロジー代数入門, サイエンス社.

[2] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論—既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解—, 岩波講座基礎数学, 岩波書店.

[3] 上野健爾, 代数入門 1, 岩波講座現代数学への入門 7, 岩波書店.

[4] 大島利雄・小林俊行, Lie 群と Lie 環 1・2, 岩波講座現代数学の基礎 12・13, 岩波書店.

[5] 神保道夫, 複素関数入門, 岩波講座現代数学への入門 4, 岩波書店.

[6] 岡本清郷, フーリエ解析の展望, すうがくぶっくす 17, 朝倉書店.

[7] 数野晴晦 (編著), 数学の儀礼と儀式辞典, 氷原社.

[8] S.G. ギンディキン (三浦伸夫訳), ガウスが切り開いた道, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[9] F. クライン (石井省吾・渡部弘訳), 19 世紀の数学, 共立出版.

[10] M. ケッヒャー (長岡昇勇訳), 数論的古典解析—歴史を訪ねて—, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[11] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房.

[12] 佐武一郎, リー群の話, 日本評論社.

[13] 示野信一, Maple V で見る数学ワールド, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[14] 高木貞治, 近世数学史談, 岩波文庫, 岩波書店.

[15] 高木貞治, 代数学講義, 共立出版.

[16] 高木貞治, 初等整数論講義 (第 2 版), 共立出版.

[17] 高橋礼司, 複素解析, 東京大学出版会.

[18] 竹内端三, 楕圓函数論, 岩波書店.

[19] 谷口雅彦・奥村善英, 双曲幾何学への招待 複素数で視る, 培風館.

[20] A. フルビッツ/ R. クーラント (足立恒雄/小松啓一訳), 楕円関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[21] C. ベルジュ(野崎昭弘訳), 組合せ論の基礎, サイエンス社.

[22] 堀田良之, 加群十話—代数学入門—, すうがくぶっくす 3, 朝倉書店.

[23] 松本久義, Enveloping algebra 入門, 東京大学数理科学セミナリーノート 11, 東京大学大学院数理科学研究科セミナー刊行会.

[24] 山内恭彦・杉浦光夫, 連続群論入門, 培風館.

[25] H. ワイル (田村二郎訳), リーマン面, 岩波書店.

[26] S. Helgason, *Groups and geometric analysis, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.* Academic

Press, Orlando, Fla., 1984 (ISBN: 0-12-338301-3)

[27] H. Hiller, *Geometry of Coxeter groups*, Pitman, Boston, Mass., 1982 (ISBN: 0-273-08517-4).

[28] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990 (ISBN: 0-521-37510-X).

[29] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.

[30] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032.

[31] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[32] L. Smith, *Polynomial invariants of finite groups*, A K Peters, Wellesley, MA, 1995 (ISBN: 1-56881-053-9).

索引

●あ行

●か行

●さ行

●た行

●な行

●は行

●ま行

●や行

●ら行

西山　享（にしやま・きょう）

1958年　神戸生まれ
1980年　京都大学理学部数学科卒業
現　在　京都大学総合人間学部助教授

著訳書　基礎課程微分積分学Ⅰ，Ⅱ（サイエンス社）
Maple Vリリース5ラーニングガイド（共訳，シュプリンガー・ファアラーク東京）

はじめよう数学2

多項式のラプソディー（たこうしき）

●――1999年3月25日　第1版第1刷発行

著　者――西山　享
発行者――大石　進
発行所――株式会社日本評論社
〒170-8474　東京都豊島区南大塚3-12-4
電話03-3987-8621(販売)　-8599(編集)
振替00100-3-16

組　版――ずうこむ
印刷所――株式会社平文社
製本所――株式会社難波製本

装幀／駒井佑二

ISBN4-535-60841-5　Printed in Japan